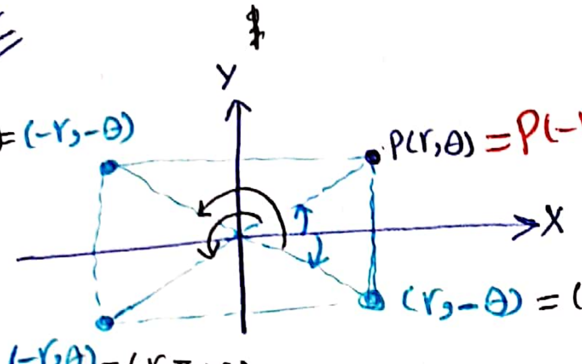
۱۷

آزمون های تقارن:



$P(r,\theta) = P(-r,\pi+\theta) = P(r,2\pi+\theta)$

$(r,\pi-\theta) = (-r,-\theta)$

$(r,-\theta) = (-r,\pi-\theta)$

$(-r,\theta) = (r,\pi+\theta)$

نمودار نقاط قرینه نسبت به محور x ها، محور y ها و نقطه قطب

۱- آزمون تقارن: اگر در منحنی $F(r,\theta)=0$ به جای (r,θ) قرار دهیم $\begin{cases}(r,-\theta)\\ \text{یا}\\ (-r,\pi-\theta)\end{cases}$ و نقطه جدید نیز در معادله یا فرم معادل آن صدق کرد، منحنی نسبت به محور x ها متقارن است.

۲- اگر در منحنی $F(r,\theta)=0$ به جای (r,θ) قرار دهیم $\begin{cases}(-r,\theta)\\ \text{یا}\\ (r,\pi+\theta)\end{cases}$ و نقطه جدید نیز در معادله (یا فرم معادل) صدق کرد، منحنی نسبت به نقطه O (قطب) متقارن است.

۳- اگر در منحنی $F(r,\theta)=0$ به جای (r,θ) قرار دهیم $\begin{cases}(-r,-\theta)\\ \text{یا}\\ (r,\pi-\theta)\end{cases}$ و نقطه جدید نیز در معادله یا فرم معادل آن صدق کرد، منحنی نسبت به محور y ها متقارن است.

~~مثال~~ فرم معادل منحنی: با توجه به اینکه موقعیت مکانی (r,θ) با $(-r,\pi+\theta)$ و $(r,2\pi+\theta)$ و $(-r,3\pi+\theta)$ و ... $((-1)^n r, n\pi+\theta)$ یکی است. اگر $r=f(\theta)$ معادله یک منحنی باشد $(-1)^n r = f(n\pi+\theta)$ نیز معادله همان شکل است که به آن فرم معادل منحنی گفته می شود.

برای ترسیم یک منحنی قطبی: ۱- تقارن ها را از روی معادله استخراج می کنیم.
۲- نقاط $\boxed{r=0}$ (این نقاط عبور منحنی از مبدا) را نیز حل می کنیم.
۳- جدول مقادیر را تشکیل داده و شکل را ترسیم می کنیم.

مثال: منحنی $r=1-\sin\theta$ را ترسیم کنید.

حل: فرم معادل منحنی:

$(r,\theta) \to (-r,\theta+\pi)$

$\to -r = 1-\sin(\theta+\pi) = 1+\sin\theta$ $\quad \boxed{\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta}$

$\to \boxed{r=-1-\sin\theta}$ ✓ $\boxed{\text{تنها فرم معادل منحنی}}$

$(r,\theta) \to (r,\theta+2\pi) \to r = 1-\sin(\theta+2\pi) = 1-\sin\theta$

نقاط عبور از مبدا یعنی نقاطی که $r=0$

$r = 1-\sin\theta = 0 \to \sin\theta = 1 \to \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

تقارن های منحنی:

$(r,\theta) \to (r,\pi-\theta)$

$r=1-\sin\theta \to r=1-\sin(\pi-\theta)$ ؟

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$r=1-\sin\theta$ ✓

لذا منحنی نسبت به محور yها متقارن است.

$(r,\theta)\to(-r,-\theta)$

$\hookrightarrow -r=1-\sin(-\theta)=1+\sin\theta$

$r=-1-\sin\theta$

این معادله هم معادل منحنی است.

تقارن نسبت به محور xها = ؟

$(r,\theta)\to\cancel{(r,-\theta)}$

$\underbrace{r=1-\sin\theta}_{✓} \to \underbrace{r=1-\sin(-\theta)=1+\sin\theta}$

این معادله نه معادله اصلی و نه معادله معادل منحنی است.

$(r,\theta)\to\cancel{(-r,\pi-\theta)}$

$\leadsto -r=1-\sin(\pi-\theta)=1-\sin\theta \leadsto \underbrace{r=-1+\sin\theta}$

← این معادله نه معادله اصلی و نه معادله معادل منحنی است.

← لذا منحنی نسبت به محور xها متقارن نیست.

تقارن نسبت به مبداء مختصات: ؟

$(r,\theta)\to\cancel{(-r,\theta)}$

$\hookrightarrow -r=1-\sin\theta \to r=-1+\sin\theta$

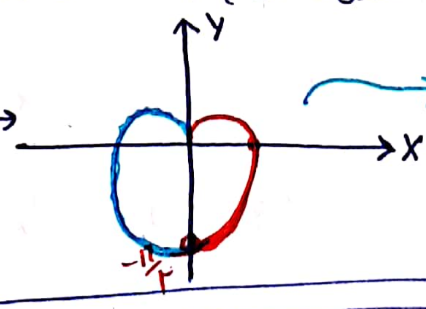
$(r,\theta)\to\cancel{(r,\pi+\theta)}$

$\hookrightarrow r=1-\sin(\pi+\theta)=1+\sin\theta$

← لذا منحنی نسبت به نقطه قطب متقارن نیست.

نتیجه: منحنی فقط نسبت به محور yها متقارن است. ← لذا یکی از نیمه‌ها را با جدول رسم می‌کنیم.

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
r	2	↘	1	↘	0



دلنما (کاردیوئید)

مثال: منحنی $r=\cos 2\theta$ را ترسیم کنید.

حل:

$(r,\theta)\to(-r,\theta+\pi) \leadsto -r=\cos(2(\theta+\pi))=\cos 2\theta \to \boxed{r=-\cos 2\theta}$ هم معادل منحنی

$(r,\theta)\to(r,-\theta)$ ✓ $\leadsto r=\cos 2(-\theta)=\cos 2\theta$ ✓ → منحنی نسبت به محور xها متقارن است.

$(r,\theta)\to(-r,\theta)$ ✓ $\leadsto -r=\cos 2\theta \to r=-\cos 2\theta$ (هم معادل منحنی) → منحنی نسبت به مبداء مختصات متقارن است.

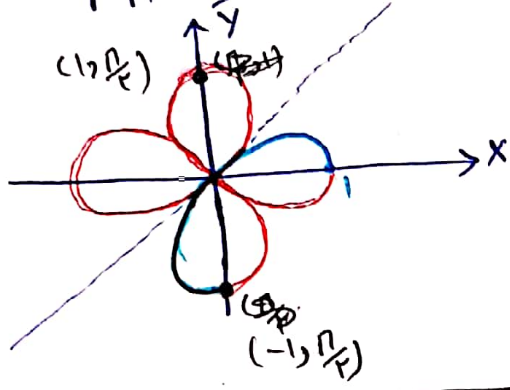
منحنی نسبت به محور yها نیز متقارن است.

نقاط عبور از مبداء: $r=0$

$$r=\cos 2\theta=0 \rightsquigarrow 2\theta=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

جدول مقادیر:

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



دستور ترسیم $r=f(\theta)$ در میپل

```
>polarplot(f(t), t=a..b);
```

طول قوس و انحنای در منحنی‌های قطبی:

$$r=f(\theta) \rightsquigarrow \begin{cases} x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta \end{cases} \rightsquigarrow \vec{r}(\theta)=f(\theta)\cos\theta\,\vec{i}+f(\theta)\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}=(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)\vec{i}+(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)\vec{j}=\vec{v}(\theta)$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|=\sqrt{f'(\theta)^2\cos^2\theta-\cancel{2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta\sin\theta}+f(\theta)^2\sin^2\theta+f'(\theta)^2\sin^2\theta+\cancel{2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta}+f(\theta)^2\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}$$

$$\text{طول قوس } r=f(\theta) \text{ از } \theta_0 \text{ تا } \theta_1=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{f'(\theta)^2+f(\theta)^2}\,d\theta$$

مثال: طول منحنی $r=1-\sin\theta$ را (یک دور از) حساب کنید.

$$\text{طول یک دور کامل منحنی}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta}\,d\theta=$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin\theta}\,d\theta=-4\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{2}(\sqrt{1+1}-0)=8$$

$$\int\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta=\int\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}du=\int\frac{du}{\sqrt{1+u}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2t^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{1+u}+c=$$

$t=1+u$

$$=2\sqrt{1+\sin t}$$

$u=\sin\theta \to du=\cos\theta\,d\theta$

$\hookrightarrow \cos\theta=\sqrt{1-u^2}$

$\hookrightarrow \cos\theta$ مثبت است.

انحنا در مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\kappa(\theta) = \frac{|x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)|}{(x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\hookrightarrow \kappa(\theta) = \frac{|f^2(\theta) + 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{(f^2(\theta) + f'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال ۱ $\quad r = 1 - \sin\theta$

$$\kappa(\theta) = \frac{|(1-\sin\theta)^2 + 2\cos^2\theta - (1-\sin\theta)\sin\theta|}{((1-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

توابع چند متغیره حقیقی:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2y^2 + x + y + \sin(xy) \rightsquigarrow D_f = \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = xy + e^{xy} + \ln(x+y) \rightsquigarrow D_f = \{(x,y) : x+y>0\}$

$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \cos(xy) \rightsquigarrow D_f = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \rightsquigarrow D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $\longrightarrow x^2+y^2=0 \leftrightarrow x=y=0$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = xyz + \ln(xyz) \rightsquigarrow D_f = \{(x,y,z) : xyz>0\}$

$f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}} \rightsquigarrow D_f = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2>1\}$

$f(x,y,z) = \cos(xyz) + \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2+1} \rightsquigarrow D_f = \mathbb{R}^3$

دامنه تابع f = D_f = مجموعه نقاطی که تابع در آنها تعریف شده است و دارای یک مقدار حقیقی است.

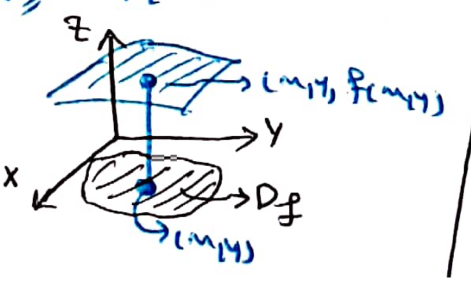
دستور ترسیم $z=f(x,y)$ در میپل

```
> plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d);
```

برد تابع f = R_f = $f(D_f)$

نمودار: نمودار تابع $z=f(x,y)$ = $\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in D_f\}$

یک سطح است در $\mathbb{R}^3$



نمودار تابع سه متغیره

~~$w = f(x,y,z)$~~

~~$\{(x,y,z,f(x,y,z)) : (x,y,z)\in D_f\}$~~ $\subseteq \mathbb{R}^4$

قابل ترسیم و تصور نیست

حد توابع چند متغیره: مفهوم حد از نظر هندسی و نیز از نظر تعریف ریاضی مانند حد توابع تک متغیره

الف

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \equiv \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t. if } 0<\underbrace{|x-x_0|}_{\text{فاصله } x \text{ تا } x_0}<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

به طوری که such that

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \equiv \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t. if } 0<\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{فاصله } (x,y) \text{ تا } (x_0,y_0)}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L \equiv \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t. if } 0<\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}_{\text{فاصله } (x,y,z) \text{ تا } (x_0,y_0,z_0)}<\delta \Rightarrow |f(x,y,z)-L|<\varepsilon$$

مثال: ثابت کنید $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}=0$.

چیزی که باید ثابت شود این است:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t. if } 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|<\varepsilon$$

این عبارت را دستکاری کنیم تا به ترکیبی از δ برسیم

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^4}\le 1 \iff x^2\le x^2+y^4 \iff 0\le y^4$$

$$y^2\le x^2+y^2 \iff 0\le x^2$$

لذا اگر δ را طوری انتخاب کنیم که $\boxed{0<\delta<\varepsilon}$ قرار دهیم ۲ برقرار شود.

مثال: ثابت کنید $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}=0$

چیزی که باید ثابت شود:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{s.t. if } 0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right| \le y^2z^2 \le (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2) \le \delta^4$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\le 1 \iff x^2\le x^2+y^2+z^2 \iff 0\le y^2+z^2$$

$$y^2\le x^2+y^2+z^2$$
$$z^2\le x^2+y^2+z^2$$

لذا اگر δ را طوری بگیریم که $\boxed{\delta^4<\varepsilon}$ قرار دهیم بالا برقرار شود

$$\boxed{0<\delta<\sqrt[4]{\varepsilon}}$$