

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \leadsto \kappa(t) = \frac{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{v}(t)|^3} = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

$$x'^2 + y'^2 - \frac{1}{\epsilon} z'^2 = 1 \quad \text{و} \quad z'^2 = x'^2 + y'^2 \quad \text{در این نقطه، فاصله مشترک دو دایره}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x'^2 + y'^2 - \frac{1}{\epsilon}(x'^2 + y'^2) = 1 \leadsto x'^2 + y'^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \leadsto z'^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \quad \text{دایره کبیله} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x'^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \cos^2 t \\ y'^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \sin^2 t \end{cases} \leadsto \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \cos t \\ y' = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \sin t \end{cases} \quad \boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

$$\vec{r}(t) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \cos t \vec{i} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \sin t \vec{j} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \vec{k}$$

$$\hookrightarrow \vec{v}(t) = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \sin t \vec{i} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \cos t \vec{j} \leadsto |\vec{v}(t)| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \sin^2 t + \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \cos^2 t} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}}$$

$$\hookrightarrow \vec{a}(t) = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \cos t \vec{i} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \sin t \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \sin t & \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \cos t & 0 \\ -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \cos t & -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}} \sin t & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \sin^2 t + \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \cos^2 t \right) \vec{k} = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \vec{k}$$

$$\rightarrow \kappa(t) = \frac{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}{|\vec{v}(t)|^3} = \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}}{\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon - 1}}\right)^3} = \frac{\sqrt{\epsilon - 1}}{\sqrt{\epsilon}}$$

نکات مهم: متغیرهای ϵ و κ در متغیرهای ϵ و κ به هم وابسته است.

$$\hookrightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \leadsto \vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

$$\leadsto \vec{a}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} \leadsto \vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = (x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

$$\leadsto \kappa = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: این دایره را در مرکز (m, y_0) دایره کبیله

$$(x - m)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{معادله دایره}$$

$$\hookrightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{معادله دایره کبیله}$$

12

$$\rightarrow x - x_0 = r \cos t, \quad y - y_0 = r \sin t$$

$$\rightarrow r(t) = (x_0 + r \cos t) \vec{i} + (y_0 + r \sin t) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \dot{x}(t) &= -r \sin t \\ \hookrightarrow \ddot{x}(t) &= -r \cos t \end{aligned}$$

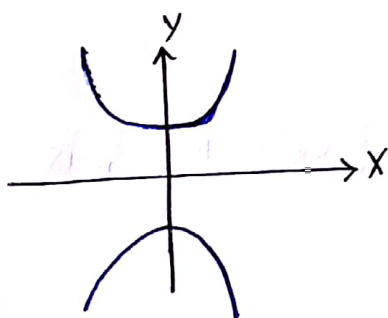
$$\begin{aligned} \hookrightarrow \dot{y}(t) &= r \cos t \\ \hookrightarrow \ddot{y}(t) &= -r \sin t \end{aligned}$$

$$\rightarrow K = \frac{|(-r \cos t)(r \cos t) - (-r \sin t)(-r \sin t)|}{(r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2 |\cos^2 t + \sin^2 t|}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow \boxed{K = \frac{1}{r}}$$

انحنای کمتر $\rightarrow$ رادیوس بزرگتر
انحنای بزرگتر $\rightarrow$ رادیوس کوچکتر

مثال: دایره و هذلولی $y^2 - x^2 = 1$ را حل کنید.



$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \rightarrow y = \cosh t, \quad x = \sinh t$$

$$\rightarrow r(t) = \sinh t \vec{i} + \cosh t \vec{j}$$

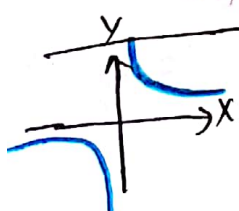
$$\begin{aligned} x=t &\rightarrow y = \pm \sqrt{1+t^2} \\ r(t) &= t \vec{i} \pm \sqrt{1+t^2} \vec{j} \end{aligned}$$

$$K(t) = \frac{|\sinh t \times \sinh t - \cosh t \times \cosh t|}{(\cosh^2 t + \sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1 + \sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

دایره و هذلولی: منحنای مربع: $y = f(x)$

$$x = t \rightarrow y = f(t) \rightarrow r(t) = t \vec{i} + f(t) \vec{j}$$

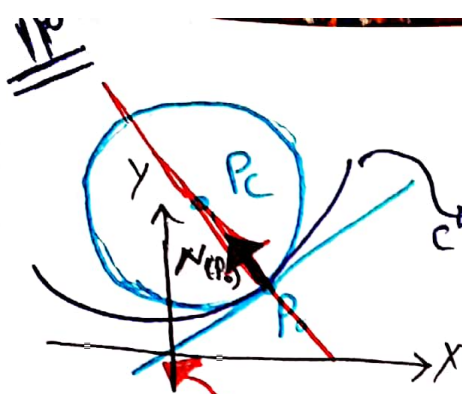
$$K = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow K(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$K(x) = \frac{\frac{1}{x^3}}{(1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{x^3}}{(1 + \frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: دایره $y = \frac{1}{x}$ را حل کنید.
 $\hookrightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \rightarrow y'' = \frac{2}{x^3}$

در صحنه کلیه حرکات دایره‌ای حرکت در آن تحلیل کرد.



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

با استفاده از

دایره افقی = دایره بوس

دایره‌ای با ۳ ویژگی زیر را دایره افقی در نقطه P_0 می‌نامند.

خط مماس بر دایره و منفرجه مشترک است.

۱- در P_0 منفرجه دایره برهم می‌آید.

۲- در P_0 افق دایره و منفرجه مساوی است.

۳- مرکز دایره P_c در طرف تقعر است.

حالت N به طرف تقعر است.

برابر یافتن دایره به منفرجه مرکز P_c و شعاع دایره نیاز است.

$$r_c = \frac{1}{K(P_0)} \rightarrow K(P_0) = \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\text{افق دایره}}$$

در دایره خط گذرنده از شعاع بر مماس دایره عمود است.

$$\vec{P_0 P_c} = \frac{1}{K(P_0)} \vec{N}(P_0)$$

اگر P_0 را بگیریم

$$y^2 - x^2 = 1$$

در $t=0$ در هذلولی

$$\vec{r}(t) = \sinh t \vec{i} + \cosh t \vec{j}$$

$t=0 \leftrightarrow (1,0)$

$$K(0) = \frac{1}{(1 + 2\sinh^2 0)^{3/2}} = 1$$

$$\vec{v}(t) = \cosh t \vec{i} + \sinh t \vec{j}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\cosh t}{\sqrt{1 + 2\sinh^2 t}} \vec{i} + \frac{\sinh t}{\sqrt{1 + 2\sinh^2 t}} \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{\sinh t \sqrt{1 + 2\sinh^2 t} - \frac{2\sinh t \cosh t}{\sqrt{1 + 2\sinh^2 t}}}{1 + 2\sinh^2 t} \vec{i} + \frac{\cosh t \sqrt{1 + 2\sinh^2 t} - \frac{2\sinh^2 t \cosh t}{\sqrt{1 + 2\sinh^2 t}}}{1 + 2\sinh^2 t} \vec{j}$$

اگر $P_c(x_c, y_c)$ مرکز دایره افقی باشد.

$$\vec{P_0 P_c} = (x_c - 0)\vec{i} + (y_c - 1)\vec{j} = \frac{1}{K(0)} \vec{N}(0) = \vec{j}$$

$$\begin{cases} x_c = 0 \\ y_c - 1 = 1 \rightarrow y_c = 2 \end{cases} \rightarrow P_c = (0, 2)$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

معادله دایره افقی در هذلولی در $(1,0)$