

(۳)

طول قوسرها:

حد و مشتق توابع برداری: تابع $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ را در نظر بگیرید:

حد تابع $r(t)$ در t_0 را r_0 می‌گویند:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} x(t))\vec{i} + (\lim_{t \rightarrow t_0} y(t))\vec{j} + (\lim_{t \rightarrow t_0} z(t))\vec{k}$$

$$= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = r_0$$

(مستطیقه و دایره به صورت الفه ای)

مثال:

$$r(t) = \frac{\sin t}{t}\vec{i} + e^t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t})\vec{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} e^t)\vec{j} + (\lim_{t \rightarrow 0} t^2)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j}$$

$$r(t) = \frac{t}{t-1}\vec{i} + \cos t\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t-1})\vec{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} \cos t)\vec{j} + (\lim_{t \rightarrow 0} t)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{j}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} r(t) = (\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t-1})\vec{i} + (\lim_{t \rightarrow 1} \cos t)\vec{j} + (\lim_{t \rightarrow 1} t)\vec{k}$$

موجود نیست. $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$ صد ندارد. (محدود نیست)

نویسنده: تابع $r(t)$ در t_0 پیوسته نامیده می‌شود اگر $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ در t_0

پیوسته باشند.

در نقطه نقطه پیوسته است. در $t=1$ نام پیوسته است.

④

موقع بردار: $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$\frac{dr}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_0)\vec{i} + \frac{dy}{dt}(t_0)\vec{j} + \frac{dz}{dt}(t_0)\vec{k}$$

به شرط مستقیم بردار $x(t), y(t), z(t)$

مثال: $r(t) = e^t \vec{i} + \frac{t}{t^2+1} \vec{j} + \cos t \vec{k}$

$$\frac{dr}{dt} = e^t \vec{i} + \left[\frac{(t^2+1) - t(2t)}{(t^2+1)^2} \right] \vec{j} - \sin t \vec{k}$$

$r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$

$$\frac{dr}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = r''(t) = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

تغییر بردار موقعیت

بردار مماس بر $r(t)$: $r'(t) = \frac{dr}{dt}$

باقی بماند

بردار جهت حرکت در t : $\frac{v(t)}{|v(t)|}$

تندی: $|v(t)|$

ممنوع $r(t)$ همواره کاملاً هموار است. $r'(t)$ موازی بردار مماس به $r(t)$ است.

ممنوع قطعه قطعه هموار: بمنزله حاصل اتصال ضمیمه بمنزله هموار یکدیگر

نقطه توقف: $r'(t) = 0$

مثال: درازه متحرک با مکان $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sin t \vec{k}$ سرعت $r'(t)$

و تندی را محاسبه کنید: $v(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \cos t \vec{k}$

تندی: $|v(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

تندی: $a(t) = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j} - \sin t \vec{k}$

811

فرمول مشتق :

$$\frac{d}{dt}[r_1(t) + \alpha r_2(t)] = \frac{dr_1}{dt} + \alpha \frac{dr_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[c(t) r(t)] = \frac{d}{dt} c(t) r(t) + c(t) \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \cdot r_2(t)) = \frac{dr_1}{dt} \cdot r_2(t) + r_1(t) \cdot \frac{dr_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \times r_2(t)) = \frac{dr_1}{dt} \times r_2(t) + r_1(t) \times \frac{dr_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} r(\alpha(t)) = \alpha'(t) \cdot r'(\alpha(t))$$

نکته: اگر $r'(t) \perp r(t)$ در انبرد $\forall t: |r(t)| = c$ تابع برداری دایره،
تابع برداری دایره ضرب در اصل دلیل: $(A \cdot A = |A|^2)$

$$|r(t)| = c \rightarrow |r(t)|^2 = c^2$$

$$\rightarrow r(t) \cdot r(t) = c^2 \rightarrow r'(t) \cdot r(t) + r(t) \cdot r'(t) = 0$$

$(A \cdot B = B \cdot A)$

$$\rightarrow r'(t) \cdot r(t) = 0 \rightarrow r'(t) \cdot r(t) = 0$$

$$\rightarrow r'(t) \perp r(t) \quad (A \cdot B = 0 \leftrightarrow A \perp B)$$

پارمتر در تابع برداری

$$\int r(t) dt = R(t) + \vec{C} \leftrightarrow \frac{dR}{dt} = r(t)$$

$$\rightarrow R(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}, \quad r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\frac{dX}{dt} = x(t), \quad \frac{dY}{dt} = y(t), \quad \frac{dZ}{dt} = z(t)$$

$$\rightarrow \int r(t) dt = \left(\int x(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int y(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int z(t) dt \right) \vec{k} + \vec{C}$$