

است و در غیر این صورت نیست.
معادله فوق را به صورت دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 \\ c_1 + c_3 = a_2 \\ c_1 + c_2 = a_3 \end{cases}$$

می‌نویسیم. ملاحظه می‌شود که معادلات اول و سوم متناقض هستند (مگر اینکه $a_1 = a_3$). بنابراین نتیجه می‌گیریم که X مولد R^3 نیست. ■

این بخش را با اثبات قضیه نسبتاً بدیهی زیر به پایان می‌بریم.

قضیه ۲-۲-۳ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ یک زیر مجموعه متناهی از یک فضای برداری و $X' = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ باشد، آنگاه $sp(X') = sp(X)$ اگر و تنها اگر x_k یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ باشد.

اثبات:

(کفایت): بدیهی است که $sp(X') \subset sp(X)$ پس کافی است ثابت کنیم

$$sp(X') \supset sp(X)$$

فرض کنید $y \in sp(X)$ ، آنگاه طبق تعریف داریم

$$y = c_1 x_1 + \dots + c_{k-1} x_{k-1} + c_k x_k, \quad c_1, \dots, c_k \in R$$

چون طبق فرض x_k یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ است می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} y &= c_1 x_1 + \dots + c_{k-1} x_{k-1} + c_k (d_1 x_1 + \dots + d_{k-1} x_{k-1}), \quad d_1, \dots, d_{k-1} \in R \\ &= (c_1 + c_k d_1) x_1 + \dots + (c_{k-1} + c_k d_{k-1}) x_{k-1} \end{aligned}$$

پس y یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ و در نتیجه متعلق به $sp(X')$ است.

(لزوم) فرض کنید $sp(X') = sp(X)$. چون $x_k \in sp(X)$ ، پس $x_k \in sp(X')$ و

در نتیجه بنابر تعریف گستره، x_k باید یک ترکیب از $x_1, \dots, x_{k-1}$ باشد. ■

قضیه فوق به این معنی است که حذف یک بردار از یک مجموعه، گستره آن مجموعه را تغییر نمی دهد اگر و تنها اگر آن بردار یک ترکیب خطی از بقیه بردارهای آن مجموعه باشد.

$$u_k = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{k-1} u_{k-1}$$

$$\rightarrow c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k = 0 \quad \text{۳-۳ استقلال خطی}$$

همان طور که در پایان بخش قبل دیدیم ممکن است بتوانیم برداری را از یک مجموعه متناهی بردارها حذف کنیم بدون اینکه گستره مجموعه کوچکتر شود. طبعاً این سؤال پیش می آید که اگر مجموعه متناهی X مولد یک زیر فضای W از فضای برداری V باشد، تعداد اعضای X را تا چه اندازه می توان کاهش داد به طوری که X باز هم مولد W باقی بماند. به عبارت دیگر کوچکترین مجموعه متناهی از بردارهای V که مولد W باشد، چند عضو دارد. این سؤالی است که در این بخش به آن پاسخ خواهیم داد و ابتدا به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۳-۳-۱ فرض کنید X یک زیر مجموعه متناهی از فضای برداری V باشد، آنگاه X (و اعضای X) را وابسته خطی می نامیم اگر بتوان یکی از اعضای X را به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضای X نوشت.

فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. در این صورت تعریف فوق معادل این است که بگوییم (تمرین): X را وابسته خطی می نامیم اگر اعداد حقیقی $c_1, \dots, c_k$ که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد طوری که

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = 0$$

با توجه به تعریف فوق قضیه ۳-۲-۲ را به صورت معادل زیر می توان نوشت.

قضیه ۳-۳-۱ هرگاه مجموعه ای از بردارها وابسته خطی باشد، می توان لااقل یکی از اعضای آن را حذف کرد بدون اینکه گستره آن تغییر کند.

یک مجموعه از بردارها را که وابسته خطی نباشند، مستقل خطی می نامیم. به این ترتیب تعریف زیر نیز معادل تعریف ۳-۳-۱ است.

تعریف ۳-۳-۲ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه ای از بردارها باشد، آنگاه X و

(اعضای X) را مستقل خطی می‌نامیم اگر از رابطه

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = \theta$$

که در آن $c_1, \dots, c_k$ اعداد حقیقی هستند، بتوان نتیجه گرفت که $c_1 = \dots = c_k = 0$.

دو نتیجه زیر فوراً از تعریف فوق حاصل می‌شود.

نتیجه ۱-۳-۳ هر مجموعه تک عضوی که تنها بردار عضو آن بردار صفر (یعنی θ)

نباشد، مستقل خطی است.

اگر $c_1 \neq 0$ $c_1'(c_1 x_1) = 0 \leftarrow c_1' x_1 = 0 \leftarrow x_1 = 0$
 اگر $c_1 x_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$

نتیجه ۲-۳-۳ هر مجموعه متناهی از بردارها که یکی از اعضای آن بردار صفر (θ)

باشد، وابسته خطی است. $1 \times 0 + 0 x_1 + \dots + 0 x_k = 0$

$$X = \{0, x_1, \dots, x_k\}$$

مثال ۱-۳-۳ زیر مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ از R^3 مستقل خطی است

زیرا از رابطه

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

و از این دستگاه نتیجه می‌شود که $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

اما زیر مجموعه $X' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ از R^3 وابسته خطی است زیرا معادله

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را می‌توان به صورت دستگاه

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} r c_1 + c_2 + r c_3 = 0 \\ c_1 + r c_2 = 0 \\ r c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\times r \begin{cases} -r c_2 + r c_3 = 0 \\ r c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = -\frac{1}{r} c_3$$

$$c_2 = \frac{r}{r} c_3$$

$$-\frac{r}{r} c_3 + \frac{r}{r} c_3 + r c_3 = 0$$

$$r c_3 = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$c_1 = c_2 = 0 \quad \text{و} \quad c_1 = c_2 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

نوشت که از طریق روش گاوس (فصل ۲) به دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$$

تبدیل می شود که جوابهای آن را به صورت

$$c_1 = -t, \quad c_2 = t, \quad c_3 = t$$

می توان نوشت که t مقدار اختیاری c_3 است. مثلاً اگر t را برابر ۱ اختیار کنیم داریم

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1$$

و در نتیجه بنابر تعریف ۳-۳-۲ مجموعه X' وابسته خطی است. ■

مثال ۳-۳-۲ زیر مجموعه $D = \{f, g, h\}$ از P_2 که در آن

$$f(t) = 2t^2 + t - 1, \quad g(t) = 2t - t^2, \quad h(t) = 2 - 3t$$

یک مجموعه مستقل خطی است. زیرا برای استفاده از تعریف استقلال خطی می نویسیم.

$$c_1 f + c_2 g + c_3 h = 0$$

چون عضو خنثی در P_2 چند جمله ای صفر است (مثال ۳-۱-۴)، داریم

$$c_1(2t^2 + t - 1) + c_2(2t - t^2) + c_3(2 - 3t) \equiv 0$$

که آن را می توان به صورت

$$(2c_1 - c_2)t^2 + (c_1 + 2c_2 - 3c_3)t + (-c_1 + 2c_3) \equiv 0$$

نوشت. و در نتیجه دستگاه

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

را داریم که با استفاده از روش گاوس به دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \\ c_2 - \frac{6}{5}c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

منجر می شود که جواب یکتای $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ دارد. ■

قضیه زیر نشان می دهد که حذف کردن یک یا چند بردار از یک مجموعه مستقل خطی به استقلال خطی مجموعه لطمه ای نمی زند.

قضیه ۳-۳-۲ اگر مجموعه $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها باشد، آنگاه هر زیر مجموعه از X نیز مستقل خطی است.

اثبات: فرض کنید $X' = \{x_1, \dots, x_r\}$ که $r < k$ ، وابسته خطی است، یعنی اعداد حقیقی $c_1, \dots, c_r$ که همگی صفر نیستند وجود دارند طوری که

$$c_1x_1 + \dots + c_rx_r = \theta.$$

پس می توان نوشت

$$c_1x_1 + \dots + c_rx_r + 0x_{r+1} + \dots + 0x_k = \theta$$

که خلاف فرض استقلال خطی X است. ■

قضیه ۳-۳-۳ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه ای از بردارهای غیر صفر از فضای برداری V باشد. آنگاه X وابسته خطی است اگر و تنها اگر یکی از اعضای X یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از خود باشد. اثبات:

(کفایت) فرض کنید x_j یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از خود باشد. در این صورت لزوماً $j > 1$. پس می توان نوشت

$$c_1x_1 + \dots + c_{j-1}x_{j-1} + (-1)x_j + 0x_{j+1} + \dots + 0x_k = \theta$$

که در آن ضرایب x_j ها همگی صفر نیستند. پس بنابر تعریف ۳-۳-۲، X وابسته خطی است.

(لزوم) فرض کنید X وابسته خطی است. پس بنابر تعریف ۳-۳-۲ اعداد حقیقی

$c_1, \dots, c_k$ ، که همگی صفر نیستند، وجود دارند که

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = \theta \quad (۳-۳-۱)$$

فرض کنید j بزرگترین عددی باشد که $c_j \neq 0$. در این صورت رابطه فوق را به صورت

$$x_j = -\frac{c_1}{c_j} x_1 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} x_{j-1}$$

می نویسیم. همه ضرائب سمت راست رابطه فوق نمی توانند صفر باشند، چون در این صورت $x_j = \theta$ که خلاف فرض مخالف صفر بودن اعضای X است. پس x_j یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از خود است و اثبات کامل می باشد. ■

۳-۴ پایه

از آخرین قضیه بخش قبل و قضیه ۳-۲-۲ (آخرین قضیه بخش ۳-۲) نتیجه می گیریم که اگر X یک زیر مجموعه متناهی از فضای برداری V و وابسته خطی باشد آنگاه بدون اینکه گستره X تغییر کند، می توانیم یکی از اعضای X را حذف کنیم. مثلاً اگر X مولد زیر فضای W و وابسته خطی باشد زیر مجموعه ای از X مانند X' با یک عضو کمتر وجود دارد که مولد W باشد. بدیهی است که با تکرار این عمل یعنی با یکی یکی حذف کردن اعضای X نهایتاً به یک مجموعه مستقل خطی می رسیم، چون در غیر این صورت به یک مجموعه تهی خواهیم رسید و یک مجموعه تهی نمی تواند مولد یک زیر فضای برداری باشد. مجموعه مستقلی که به این ترتیب حاصل می شود نام خاصی دارد که اینک تعریف می شود.

تعریف ۳-۴-۱ اگر مجموعه مستقل خطی X مولد زیر فضای W از فضای برداری V باشد، X را یک پایه برای W نامیم.

بنابر تعریف فوق برای اثبات اینکه یک مجموعه متناهی X یک پایه برای یک زیر

فضا مانند W است، لازم و کافی است که ثابت کنیم

الف) X مستقل خطی است.

ب) X مولد W است.

مثال ۳-۴-۱ مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ یک پایه برای

فضای برداری R^3 است زیرا

الف) X مستقل خطی است چون رابطه

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادل دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{X-1} \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow c_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

است و این دستگاه با استفاده از روش گاوس معادل دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

است که دارای جواب یکتای $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ می باشد (تعریف ۳-۳-۲). و

ب) X مولد R^3 است. زیرا اگر $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ یک عضو عمومی R^3 باشد معادله

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

معادل دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = a_2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = a_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_3 = a_3 - a_1 \\ c_1 + c_2 = 2a_1 - a_3 \\ c_1 + 2c_2 = a_2 + a_1 - a_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = a_2 - a_1 \\ c_1 = 2a_1 - a_3 - a_2 \end{cases}$$

است که با استفاده از روش گاوس به دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = a_1 \\ c_2 = a_2 - a_1 \\ c_3 = a_3 - a_1 \end{cases}$$

تبدیل می شود که دارای جواب

$$\begin{cases} c_1 = a_1 - a_2 - a_3 \\ c_2 = a_2 - a_1 \\ c_3 = a_3 - a_1 \end{cases}$$

است. یعنی هر عضو R^3 را می توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای X نوشت. ■

مثال ۳-۴-۲ چون بدیهی است که می توان نوشت (به ازای هر $a \in R^3$)

$$a_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{c}_1} + a_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{c}_2} + a_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{c}_3} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a$$

و چون بدیهی است که رابطه

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادل $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ یعنی معادل $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ است، نتیجه می گیریم که

مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ نیز یک پایه برای R^3 است. این پایه که آن

را پایه طبیعی R^3 نامند دارای این ویژگی مطلوب است که هر عضو R^3 را به راحتی می توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای آن نوشت و نیازی به حل معادلات

نیست. مجموعه های $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$\{[1 \ 0 \ \dots \ 0], [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0], \dots, [0 \ \dots \ 0 \ 1]\} \text{ و } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

به ترتیب پایه‌های طبیعی R^2 و R^n و R_m هستند. ■

مثال ۳-۴-۳ مجموعه $D = \{f, g, h\}$ که در آن $f(t) = t^2$ ، $g(t) = t$ ، $h(t) = 1$ یک پایه برای فضای برداری P_2 (مجموعه چندجمله‌ای‌های درجه ۲ یا کمتر) است زیرا

$$c_1 f + c_2 g + c_3 h = 0 \quad (\text{الف})$$

$$c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \equiv 0 \quad \text{یعنی}$$

که نتیجه می‌دهد $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ یعنی D مستقل خطی است.

(ب) اگر $u(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ یک عضو عمومی P_2 باشد داریم

$$u = a_1 f + a_2 g + a_3 h$$

یعنی D مولد P_2 است. این پایه را پایه طبیعی P_2 می‌نامیم. ■

مثال ۳-۴-۴ مجموعه D در مثال ۳-۳-۲ نیز یک پایه برای P_2 است زیرا

(الف) در مثال ۳-۳-۲ نشان دادیم که D مستقل خطی است

(ب) اگر $u(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ باشد می‌نویسیم

$$c_1 f + c_2 g + c_3 h = u$$

یعنی

$$c_1 (2t^2 + t - 1) + c_2 (2t - t^2) + c_3 (2 - 3t) \equiv a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

که پس از جمع جملات مشابه در طرف چپ داریم

$$(2c_1 - c_2)t^2 + (c_1 + 2c_2 - 3c_3)t + (-c_1 + 2c_3) \equiv a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

که معادل دستگاه

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & a_1 \\ 1 & 2 & -3 & a_2 \\ -1 & 0 & 2 & a_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2c_1 - c_2 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 - 3c_3 = a_2 \\ -c_1 + 2c_3 = a_3 \end{cases}$$

۷۹ فضای برداری

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - 3c_3 = d_1 \\ c_2 - \frac{7}{5}c_3 = d_2 \\ c_3 = d_3 \end{cases}$$

است که ماتریس افزوده آن پس از انجام اعمال مقدماتی سطری به صورت

$$* \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & d_1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array} \right] \quad d_1 = a_1, \quad d_2 = \frac{2a_2 - a_1}{5}, \quad d_3 = \frac{a_2 + 5a_3 + 2a_1}{5}$$

به دست می آید. چون ستونهای اولیه ماتریس فوق همگی دارای درایه پیشرو هستند دستگاه جواب دارد (بخش ۲-۲). و لذا هر عضو P_2 را می توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای D نوشت یعنی D مولد P_2 است. ■

مثال ۳-۴-۵ به راحتی و مشابه مثالهای فوق می توان نشان داد که مجموعه های

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

هر کدام یک پایه برای زیر فضای

$$W = \left\{ x \in R^4 \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in R, x_3 = x_4 = 0 \right\}$$

از فضای برداری R^4 هستند.

همچنین به راحتی می توان نشان داد که مجموعه های

$$D_1 = \{f_1, g_1\} \quad , \quad f_1(t) = t \quad , \quad g_1(t) = 1$$

$$D_2 = \{f_2, g_2\} \quad , \quad f_2(t) = t - 1 \quad , \quad g_2(t) = t + 1$$

$$W = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$$

تک‌نقطه‌ای W زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ در W یک پایه است.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in W \rightarrow a_3 = -a_1 - a_2 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{لذا } X \text{ مولد } W \text{ است.}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ -c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \checkmark \rightarrow \text{لذا } X \text{ مستقل خطی است.}$$

لذا X یک پایه برای W است.

هر کدام یک پایه برای زیر فضای $W = P_1$ از فضای برداری P_2 هستند. ■

مثال ۳-۴-۶ چون مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ مولد فضای برداری R^3 نیست

(مثلاً بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را نمی‌توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای X نوشت) و

مجموعه $X'' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ چون مستقل خطی نیست (باتوجه

به مثال ۳-۳-۱ و قضیه ۳-۳-۱) هیچ‌کدام برای R^3 پایه نیستند. توجه کنید که مجموعه

$X' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ نیز برای R^3 پایه نیست چون نه مستقل خطی است و نه

مولد R^3 می‌باشد (تمرین). ■

مثالهای فوق نشان می‌دهند که هر فضای (یا زیر فضای) برداری می‌تواند چندین پایه داشته باشد. اینکه در مثالهای فوق پایه‌های متفاوت برای یک فضای (یا زیر فضای) برداری دارای تعداد مساوی عضو هستند. تصادفی نیست بلکه واقعیتهای عمومی است که در قضیه اساسی زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۳-۴-۱ (قضیه اساسی جبر خطی) فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است. آنگاه

(الف) هر زیر مجموعه n عضوی مستقل خطی از V یک پایه برای V است.

(ب) هر زیر مجموعه از V که دارای بیش از n بردار باشد وابسته خطی است.

(ج) هر زیر مجموعه از V که دارای کمتر از n بردار باشد نمی‌تواند برای V پایه

باشد.

اثبات:

(الف) فرض کنید $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ زیر مجموعه مستقل خطی دیگری از V

باشد. در این صورت چون X برای V پایه است می توان نوشت

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

چون Y مستقل خطی است پس $y_1 \neq 0$ ، لذا لااقل یکی از اعداد حقیقی $a_{11}, \dots, a_{1n}$ مخالف صفر است. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $a_{11} \neq 0$ پس می توان نوشت

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n.$$

پس اگر تعریف کنیم

$$X_1 = \{y_1, x_1, \dots, x_n\} \quad , \quad Y_1 = \{y_1, x_2, \dots, x_n\}$$

با توجه به قضیه ۲-۲-۳ می توان نوشت

$$V = sp(X) = sp(X_1)$$

$$= sp(Y_1)$$

چون Y_1 مولد V است می توان نوشت

$$y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n.$$

چون Y مستقل خطی است، همه ضرائب سمت راست رابطه فوق نمی تواند صفر باشد. از طرفی چون Y مستقل خطی است $y_2 \neq a_{21}y_1$. پس لااقل یکی از ضرائب $a_{22}, \dots, a_{2n}$ مخالف صفر است. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $a_{22} \neq 0$. پس

می توان نوشت

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}y_1 + \frac{1}{a_{22}}y_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n.$$

پس اگر تعریف کنیم

$$Y_2 = \{y_1, y_2, x_3, \dots, x_n\}$$

از قضیه ۲-۲-۳ نتیجه می شود که

$$V = sp(Y_2)$$

با ادامه استدلال به همین طریق، یعنی با افزودن یک y و حذف یک x در هر مرحله نهایتاً نتیجه می گیریم که

$$V = sp(Y_n)$$

اما Y_n در واقع همان Y است و بدین ترتیب اثبات قسمت (الف) کامل است.