

و ثانیاً واضح است که

$$f+g \in P_m, \quad \forall f, g \in P_m \quad (i)$$

$$cf \in P_m, \quad \forall c \in R, \quad \forall f \in P_m \quad (ii)$$

و بنابر قضیه ۳-۱-۸ P_m زیر فضای P_n است. ■

مجموعه کلیه چند جمله‌ای‌ها که آن را با P نشان می‌دهیم نیز یک فضای برداری است (تمرین) و P_n ، به ازای هر n ، یک زیر فضای P است.

۳-۲ گستره - زیرفضای تولید شده span
این بخش را با یک تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۳-۲-۱ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ای از k بردار عضو فضای برداری V یعنی زیر مجموعه‌ای متناهی از V باشد. بردار y متعلق به V را یک ترکیب خطی از اعضای X می‌نامیم اگر بتوان y را به صورت

$$y = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$$

نوشت که در آن $c_1, \dots, c_k$ اعداد حقیقی هستند.

$$\text{مثال ۳-۲-۱ اگر } X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset R^3, \text{ آنگاه بردار}$$

$$y = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

یک ترکیب خطی از مجموعه ۳ عضوی X است و اگر

$$D = (f, g), \quad f(t) = 2t^2 - t, \quad g(t) = t - 5$$

یک زیر مجموعه ۲ عضوی از P_2 باشد آنگاه بردار

$$h = 4f + 2g$$

یک ترکیب خطی از اعضای D است. در اینجا داریم

$$h(t) = 4(2t^2 - t) + 2(t - 5) = 8t^2 - 2t - 10$$

تحقیق اینکه آیا یک بردار مفروض یک ترکیب خطی از اعضای یک مجموعه متناهی مفروض از بردارها است، منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی (درجه اول) می شود. مثال زیر این مطلب را روشن تر می کند.

مثال ۳-۲-۲ فرض کنید می خواهیم بدانیم که آیا بردار $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in R^3$ یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset R^3$ هست یا نه می نویسیم

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = y$$

یا

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

پس دستگاه زیر را داریم

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases}$$

از دو معادله اول دستگاه داریم $c_1 = 1$ و $c_2 = 2$ که این دو مقدار در معادله سوم صدق نمی کند، یعنی دستگاه جواب ندارد. نتیجه می گیریم که y را نمی توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای X نوشت. ■

به طریق مشابه مثال فوق می توان نشان داد که بردار y در این مثال را نمی توان

به صورت یک ترکیب خطی از اعضای $X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ یا حتی

از اعضای $X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ نوشت، در صورتی که می‌توان V

را به صورت یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(از مثال ۳-۲-۱) نوشت. در واقع بعداً خواهیم توانست ثابت کنیم که هر عضو R^3 را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای مجموعه فوق نوشت. ■

پس این سؤال پیش می‌آید که: یک زیر مجموعه X از فضای برداری V باید حداقل دارای چند عضو باشد تا بتوان هر عضو V را به صورت یک ترکیب خطی از اعضای X نوشت؟ به این سؤال در بخش ۳-۴ پاسخ می‌دهیم.

با توجه به بسته بودن فضاهای برداری نسبت به عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بدیهی است که مجموعه کلیه ترکیبهای خطی از اعضای یک مجموعه متناهی از بردارها زیر مجموعه‌ای از خود فضای برداری است. این مجموعه نام خاصی دارد که در تعریف زیر معرفی می‌شود.

تعریف ۳-۲-۲ فرض کنید V یک فضای برداری و X زیر مجموعه‌ای متناهی از V باشد، آنگاه مجموعه کلیه ترکیبهای خطی از اعضای X را گستره X نامیده و با $sp(X)$ نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر اگر $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ باشد آنگاه.

$$X \text{ گستره} = SP(X) = \{x \in V \mid x = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k, \quad c_1, \dots, c_k \in R\}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که گستره یک مجموعه متناهی از بردارها یک زیر فضا است.

قضیه ۳-۲-۱ فرض کنید V یک فضای برداری، $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ و $W = sp(X)$. آنگاه W یک زیر فضای V است.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = 3 \\ c_2 + 2c_3 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c_2 + 7c_3 = 8 \\ c_2 + 2c_3 = 2 \end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد. لذا رابعه بالا فاصله می‌باشد.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = y$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 + c_4 = 3 \\ c_2 + 2c_3 - c_4 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 + 3c_3 - c_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c_2 + 7c_3 - 3c_4 = 8 \\ c_2 + 2c_3 - c_4 = 2 \end{cases}$$

جواب ندارد.

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y \rightarrow \begin{cases} (2c_1 + c_2 + 2c_3 = 3) \times -1 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \\ (3c_1 + c_3 = 5) \times 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-6c_1 - c_2 = 5) \times 2 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \rightarrow -5c_1 = 17 \rightarrow c_1 = -\frac{17}{5}$$

$$\rightarrow 2c_2 = 2 + \frac{17}{5} = \frac{27}{5} \rightarrow c_2 = \frac{27}{10}$$

$$c_3 = 5 + \frac{51}{5} = \frac{76 + 51}{5} = \frac{127}{5}$$

کلیه بردارهای فضای $\mathbb{R}^3$ را می توان به صورت ترکیبات خطی نوشت.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

نوشت.

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{نویس بردار، دنگاه در } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + 2c_3 = a_1 & \times (-1) \\ c_1 + 2c_2 = a_2 \\ 3c_1 + c_3 = a_3 & \times 2 \end{cases}$$

$$c_1 + 2c_2 = a_2$$

$$\varepsilon c_1 - c_2 = 2a_3 - a_1$$

$$3c_1 + c_3 = a_3 \times 2$$

$$c_1 + 2c_2 = a_2$$

$$\varepsilon c_1 - c_2 = 2a_3 - a_1 \times 2$$

$$+ \rightarrow \Delta c_1 = a_2 + \varepsilon a_3 - 2a_1$$

$$c_1 = \frac{a_2 + \varepsilon a_3 - 2a_1}{\Delta}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(a_2 - \frac{a_2 + \varepsilon a_3 - 2a_1}{\Delta} \right)$$

$$c_3 = a_3 - \frac{2}{\Delta} (a_2 + \varepsilon a_3 - 2a_1)$$

در واقع نشان داریم:

اثبات: با توجه به قضیه ۳-۱-۸ کافیت ثابت کنیم که W نسبت به اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر حاکم بر V بسته است. فرض کنید $x, y \in W$ یعنی

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k \quad c_1, \dots, c_k \in R$$

$$y = d_1 x_1 + \dots + d_k x_k \quad d_1, \dots, d_k \in R \quad \text{آنگاه}$$

$$x + y = (c_1 x_1 + \dots + c_k x_k) + (d_1 x_1 + \dots + d_k x_k)$$

$$= (c_1 + d_1) x_1 + \dots + (c_k + d_k) x_k$$

اما سمت راست رابطه فوق یک ترکیب خطی از اعضای X و در نتیجه متعلق به W است. همچنین

$$dx = d(c_1 x_1 + \dots + c_k x_k) \quad , d \in R$$

$$= dc_1 x_1 + \dots + dc_k x_k$$

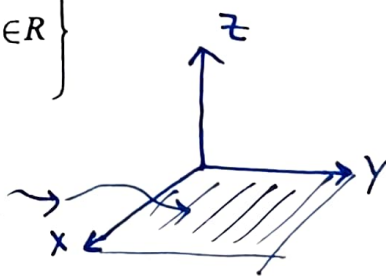
سمت راست رابطه فوق نیز یک ترکیب خطی از اعضای X و در نتیجه متعلق به W است. ■

تعریف ۳-۲-۳ اگر V یک فضای برداری، W یک زیر فضای V و X یک زیر مجموعه متناهی از V باشد به قسمی که $W = sp(X)$ ، آنگاه X را مولد W می نامیم و می گوییم که X زیر فضای W از V را پدید می آورد.

مثال ۳-۲-۳ زیر مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ از R^3 را در نظر بگیرید. داریم

$$sp(X) = \left\{ x \in R^3 \mid x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in R \right\}$$

$$= \left\{ x \in R^3 \mid x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in R \right\}$$



یعنی X زیر فضای W از R^3 مذکور در مثال ۳-۱-۵ را پدید می آورد، یا به عبارت معادل

X مولد W است.

مثال ۳-۲-۴ زیر مجموعه $D = \{f, g\}$ از P_2 ، که در آن $f(t) = t + 1$ و $g(t) = t - 1$ ، مولد زیر فضای P_1 از P_2 است زیرا فرض کنید $h \in P_1$ یعنی فرض کنید

$$h(t) = at + b, \quad a, b \in R$$

$$h = c_1 f + c_2 g \quad \text{می نویسیم}$$

$$at + b \equiv c_1(t + 1) + c_2(t - 1) \quad \text{یعنی}$$

$$at + b \equiv (c_1 + c_2)t + c_1 - c_2 \quad \text{یا}$$

که منجر به دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ c_1 - c_2 = b \end{cases}$$

می شود. چون دستگاه فوق به ازای هر a, b دارای جواب $c_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $c_2 = \frac{1}{2}(a - b)$ است، نتیجه می گیریم که D مولد P_1 (مجموعه چند جمله ای های درجه یک یا کمتر) است.

مثال ۳-۲-۵ فرض کنید می خواهیم بدانیم آیا مجموعه

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

مولد فضای برداری R^3 هست. معادله

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

را که در آن $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ یک عضو عمومی از R^3 است در نظر بگیرید. اگر به ازای هر a

معادله فوق برای c_1, c_2, c_3 جواب داشته باشد X مولد R^3

است و در غیر این صورت نیست.

معادله فوق را به صورت دستگاه

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 \\ c_1 + c_3 = a_2 \\ c_1 + c_2 = a_3 \end{cases}$$

می‌نویسیم. ملاحظه می‌شود که معادلات اول و سوم متناقض هستند (مگر اینکه $a_1 = a_3$). بنابراین نتیجه می‌گیریم که X مولد R^3 نیست. ■

این بخش را با اثبات قضیه نسبتاً بدیهی زیر به پایان می‌بریم.

قضیه ۳-۲-۲ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ یک زیر مجموعه متناهی از یک فضای برداری و $X' = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ باشد، آنگاه $sp(X') = sp(X)$ اگر و تنها اگر x_k یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ باشد.
اثبات:

(کفایت): بدیهی است که $sp(X') \subset sp(X)$ پس کافی است ثابت کنیم

$$sp(X') \supset sp(X)$$

فرض کنید $y \in sp(X)$ ، آنگاه طبق تعریف داریم

$$y = c_1 x_1 + \dots + c_{k-1} x_{k-1} + c_k x_k, \quad c_1, \dots, c_k \in R$$

چون طبق فرض x_k یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ است می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} y &= c_1 x_1 + \dots + c_{k-1} x_{k-1} + c_k (d_1 x_1 + \dots + d_{k-1} x_{k-1}), \quad d_1, \dots, d_{k-1} \in R \\ &= (c_1 + c_k d_1) x_1 + \dots + (c_{k-1} + c_k d_{k-1}) x_{k-1} \end{aligned}$$

پس y یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_{k-1}$ و در نتیجه متعلق به $sp(X')$ است.

(لزوم) فرض کنید $sp(X') = sp(X)$. چون $x_k \in sp(X)$ ، پس $x_k \in sp(X')$ و

در نتیجه بنابر تعریف گستره، x_k باید یک ترکیب از $x_1, \dots, x_{k-1}$ باشد. ■

قضیه فوق به این معنی است که حذف یک بردار از یک مجموعه، گستره آن مجموعه را تغییر نمی دهد اگر و تنها اگر آن بردار یک ترکیب خطی از بقیه بردارهای آن مجموعه باشد.

۳-۳ استقلال خطی

همان طور که در پایان بخش قبل دیدیم ممکن است بتوانیم برداری را از یک مجموعه متناهی بردارها حذف کنیم بدون اینکه گستره مجموعه کوچکتر شود. طبعاً این سؤال پیش می آید که اگر مجموعه متناهی X مولد یک زیر فضای W از فضای برداری V باشد، تعداد اعضای X را تا چه اندازه می توان کاهش داد به طوری که X باز هم مولد W باقی بماند. به عبارت دیگر کوچکترین مجموعه متناهی از بردارهای V که مولد W باشد، چند عضو دارد. این سؤالی است که در این بخش به آن پاسخ خواهیم داد و ابتدا به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۳-۳-۱ فرض کنید X یک زیر مجموعه متناهی از فضای برداری V باشد، آنگاه X (و اعضای X) را وابسته خطی می نامیم اگر بتوان یکی از اعضای X را به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضای X نوشت.

فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. در این صورت تعریف فوق معادل این است که بگوییم (تمرین): X را وابسته خطی می نامیم اگر اعداد حقیقی $c_1, \dots, c_k$ که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد طوری که

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = 0$$

با توجه به تعریف فوق قضیه ۳-۲-۲ را به صورت معادل زیر می توان نوشت.

قضیه ۳-۳-۱ هرگاه مجموعه ای از بردارها وابسته خطی باشد، می توان لااقل یکی از اعضای آن را حذف کرد بدون اینکه گستره آن تغییر کند.

یک مجموعه از بردارها را که وابسته خطی نباشند، مستقل خطی می نامیم. به این ترتیب تعریف زیر نیز معادل تعریف ۳-۳-۱ است.

تعریف ۳-۳-۲ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه ای از بردارها باشد، آنگاه X و