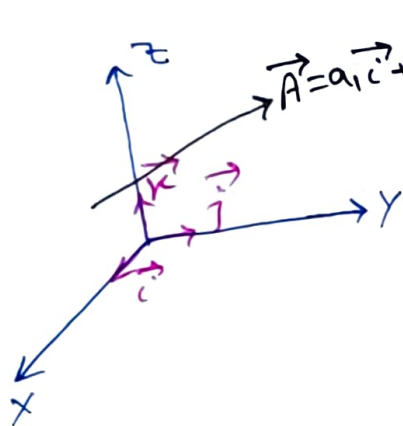
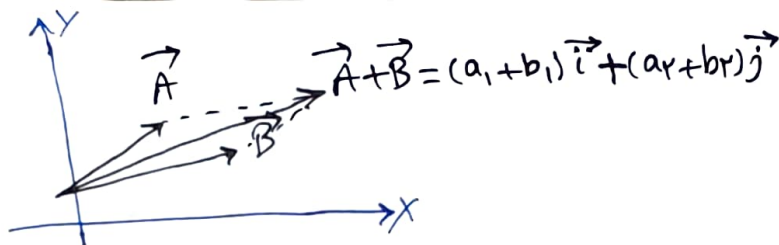
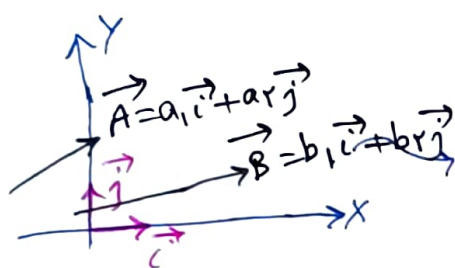




فصل ۳

فضاهای برداری

مقدمه

در فیزیک علاوه بر کمیت‌هایی مانند جرم، دما، حجم و نظایر آن که فقط مقدار آنها قابل اندازه‌گیری و توصیف است، کمیت‌های دیگری مانند نیرو، سرعت، گشتاور و نظایر آن وجود دارد که علاوه بر مقدار دارای جهت نیز می‌باشند. این کمیت‌های جهت‌دار بردار نامیده می‌شوند. حاصل جمع دو بردار، بردار دیگری است که ممکن است از نظر مقدار و جهت با دو بردار اولیه متفاوت باشد. بردارها را در اعداد حقیقی نیز می‌توان ضرب کرد و حاصل بردار دیگری است. کمیت‌های غیربردار را اسکالر می‌نامند.

نظریه فضاهای برداری در جبر خطی تجریدی از مفاهیم مربوط به بردارهای مکانیکی است ولی قلمرو کاربرد آن بسیار فراتر از بردارهای مکانیکی و خواص آنها است. در این فصل با فضاهای برداری آشنا می‌شویم. یک فضای برداری مجموعه‌ای از اشیاء ریاضی است که دارای دو ویژگی مهم بردارهای مکانیکی یعنی جمع‌پذیری و قابلیت ضرب در اعداد حقیقی هستند.

اهداف آموزشی

فضای برداری، زیر فضای برداری، ترکیب خطی، استقلال خطی، وابستگی خطی

گستره یک زیر مجموعه از یک فضای برداری

پایه و بعد برای یک فضای برداری

مختصات یک بردار و ماتریس تبدیل مختصات

رتبه‌های سطری، ستونی و رتبه یک ماتریس

آشنایی با یکریختی فضاهای برداری، یکریختی بین فضاهای با بعد متناهی
شرط داشتن جواب دستگاه معادلات با استفاده از رتبه ماتریس‌ها

۱-۳ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱-۱-۳ مجموعه V یک فضای برداری و اعضای آن بردار نامیده می‌شود اگر
الف) عملی به نام جمع برداری با علامت $\oplus$ با ویژگیهای زیر بین اعضای V
تعریف شده باشد

(i) مجموعه V تحت عمل $\oplus$ بسته باشد یعنی

$$x \oplus y \in V, \quad \forall x, y \in V$$

(ii) (جاب‌جایی)

$$x \oplus y = y \oplus x, \quad \forall x, y \in V$$

(iii) (شرکت‌پذیری)

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \quad \forall x, y, z \in V$$

(iv) (وجود عضو خنثی برای جمع)

عضوی مانند θ متعلق به V وجود داشته باشد، طوری که

$$x \oplus \theta = x, \quad \forall x \in V$$

θ را عضو خنثی نامیم.

(v) (وجود عضو قرینه برای هر عضو)

به ازای هر عضو متعلق به V عضو متعلق به V مانند y وجود داشته باشد

طوری که

$$x \oplus y = \theta$$

در این صورت y را قرینه x نامیده با $-x$ نشان می‌دهیم.

ب) عملی به نام ضرب اسکالر با علامت $\odot$ با ویژگیهای زیر بین اعداد حقیقی و

اعضای V تعریف شده باشد.

(i) مجموعه V تحت عمل $\odot$ بسته باشد یعنی

$$c \odot x \in V, \quad \forall c \in R, \quad \forall x \in V$$

(ii) (شرکت پذیری)

$$c \odot (d \odot x) = (cd) \odot x, \quad \forall c, d \in R, \quad \forall x \in V$$

(iii) (توزیعی اسکالر)

$$(c+d) \odot x = (c \odot x) \oplus (d \odot x), \quad \forall c, d \in R, \quad \forall x \in V$$

(iv) (توزیعی برداری)

$$c \odot (x \oplus y) = (c \odot x) \oplus (c \odot y), \quad \forall c \in R, \quad \forall x, y \in V$$

(v) (خنثی بودن عدد ۱ در ضرب اسکالر)

$$1 \odot x = x, \quad \forall x \in V$$

توجه: در مواردی که ابهامی پیش نمی آید کلمه «بردارى» را از عبارت «جمع بردارى» و کلمه «اسکالر» را از عبارت «ضرب اسکالر» حذف کرده و به جای $x \oplus y$ و $c \odot x$ به ترتیب $x+y$ و cx می نویسیم.

براساس اصول موضوعه دهگانه فوق نظریه فضاهاى بردارى ساخته می شود. فعلاً به ذکر چند مثال می پردازیم.

مثال ۱-۱-۳ مجموعه ماتریس هاى ستونی با بعد n همراه با جمع ماتریس ها به جای عمل $\oplus$ ، ضرب اعداد حقیقی در ماتریس ها به جای $\odot$ ، o به جای θ و یک ماتریس ستونی با درایه هاى قرینه درایه هاى x به جای $-x$ تشکیل یک فضای بردارى می دهد و برای اثبات صحت این ادعا کافىست تحقیق کنیم که شرایط دهگانه تعریف ۱-۱-۳ برقرار هستند. اما این کار به سادگى انجام می شود.

دو عضو از مجموعه فوق که آن را V می نامیم عبارت اند از

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

که $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_n$ اعداد حقیقی و به ترتیب درایه هاى x و y هستند. بدیهی است که

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in V$$

$$c \odot \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix} \in V$$

$$\mathbf{x} \oplus \theta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

$$1 \odot \mathbf{x} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

اینکه V دارای شش ویژگی دیگر نیز هست به همین سادگی تحقیق می شود. ■
 فضای برداری تعریف شده در این مثال را با R^n نشان می دهیم به سادگی می توان تحقیق کرد که مجموعه ماتریس های سطری با بعد m (که آن را با R_m نشان می دهیم) و مجموعه ماتریس های $n \times m$ (که آن را با R_m^n نشان می دهیم) نیز هر یک، یک فضای برداری هستند.

اعضای فضای برداری R^n را بردارهای قائم n بُعدی و اعضای فضای برداری R_m را بردارهای افقی m بُعدی می نامیم.

چون هر نقطه از صفحه را می توان به وسیله زوجهای مرتب نشان داد و چون اعضای R^2 (یا R_2) در واقع زوجهای مرتب هستند، R^2 (یا R_2) را می توان یک تجرید از فضای دو بُعدی صفحه در نظر گرفت. به همین ترتیب R^3 (یا R_3) تجریدی از فضای سه بُعدی فیزیکی است که نقاط آن نسبت به یک دستگاه مختصات کارتزین متشکل از دو محور افقی و یک محور قائم مشخص می شوند.

مثال ۳-۱-۲ فرض کنید V مجموعه ماتریس های ستونی با بعد ۳ که درایه آخر آنها صفر است باشد، در این صورت V همراه با همان تعاریف مثال قبل برای جمع برداری، ضرب اسکالر، عضو خنثی و قرینه یک عضو تشکیل یک فضای برداری می دهد، زیرا اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو عضو این مجموعه باشند داریم

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$$

و صحت سایر ویژگیهای تعریف ۳-۱-۱ نیز به همین سادگی تحقیق می شود. اما اگر V را مجموعه ماتریسهای ستونی با بعد ۳ که درایه آخر آنها برابر ۱ است تعریف کنیم، V همراه با جمع برداری تعریف شده در بالا تشکیل یک فضای برداری نمی دهد، چون V تحت این عمل جمع برداری بسته نیست زیرا

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{bmatrix} \notin V \quad \blacksquare$$

مثال ۳-۱-۳ فرض کنید V مجموعه توابع پیوسته در بازه $[0, 1]$ باشد. چون مجموع هر دو تابع پیوسته و ضربی از هر تابع پیوسته خود یک تابع پیوسته است، بدیهی است که V همراه با تعاریف

$$f \oplus g = f + g, \quad c \odot f = cf, \quad 0 = \text{تابع ثابت صفر}$$

$$\text{و } -f = \text{قرینه } f$$

تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است و می توان برقراری سایر شرایط تعریف ۳-۱-۱ را به سادگی تحقیق کرد. پس V با تعاریف فوق تشکیل یک فضای برداری می دهد. $\blacksquare$

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

مثال ۳-۱-۴ می دانیم که تابع $f: R \rightarrow R$ را یک چند جمله ای می نامیم اگر $f(t)$ به صورت مجموع مضاربی از توانهای t باشد. بزرگترین توان t در تعریف $f(t)$ درجه این چند جمله ای نامیده می شود. اگر f یک تابع ثابت باشد آن را یک چند جمله ای درجه صفر می نامیم. تابعی که مقدار آن به ازای همه مقادیر t برابر صفر باشد چند جمله ای صفر نامیده می شود.

$$(t^n + t^{n-1}) + (-t^n + 2t^{n-1} + t) = 3t^{n-1} + t$$

حال فرض کنید V مجموعه همه چند جمله ای های درجه n باشد، که n یک عدد صحیح مثبت ثابت است. با تعریف جمع برداری، ضرب اسکالر، عضو خنثی و قرینه یک عضو همانند مثال ۳-۱-۳، مجموعه V یک فضای برداری نخواهد بود، چون V تحت عمل جمع برداری بسته نیست، زیرا مجموع دو چند جمله ای درجه n ممکن است یک چند جمله ای با درجه کمتر از n باشد (به سبب اینکه ممکن است ضرایب جمله t^n در دو چند جمله ای قرینه یکدیگر باشند و هنگام جمع حذف شوند) اما اگر V را

مجموعه همه چند جمله‌ای‌های درجه n یا کمتر تعریف کنیم، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که V تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است و نیز دارای شرایط دهگانه تعریف ۱-۱-۳ نیز هست و لذا یک فضای برداری است. فضای برداری مجموعه چند جمله‌ای‌های درجه n یا کمتر را با P_n نشان می‌دهیم. مثلاً P_2 فضای برداری مجموعه چند جمله‌ای‌های درجه ۲ یا کمتر از قبیل $f(t) = 3t^2 + t - 5$ و $g(t) = 3 - t$ است. ■

اینک به بیان و اثبات چند قضیه مقدماتی ولی اساسی فضاهای برداری می‌پردازیم. در قضایای زیر و من بعد هر جا که ابهامی پیش نیاید $x \oplus y$ را به صورت $x + y$ و $c \odot x$ را به صورت cx می‌نویسیم.

قضیه ۱-۱-۳ عضو خنثی در فضاهای برداری ~~دارای~~ یکتا است. اثبات: فرض کنید علاوه بر θ عضو خنثی دیگری مانند θ' وجود داشته باشد. در این صورت براساس قسمت (iv) در تعریف فضاهای برداری می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\theta &= \theta' + \theta \\ &= \theta'\end{aligned}$$

■

قضیه ۱-۱-۳ هر عضو فضای برداری دارای قرینه‌ای یکتا است. اثبات: فرض کنید هم y و هم z هر دو قرینه‌های x باشند، یعنی

$$x + y = \theta, \quad x + z = \theta$$

می‌توان نوشت

$y = y + \theta$	از تعریف عضو خنثی
$= y + (x + z)$	از تعریف قرینه
$= (y + x) + z$	از ویژگی شرکت‌پذیری
$= \theta + z$	از تعریف قرینه
$= z$	از تعریف عضو خنثی

■

قضیه زیر که به قاعده حذف موسوم است به ما اجازه می‌دهد از طرفین یک

تساوی برداری، بردارهای مساوی را حذف کنیم.

قضیه ۳-۱-۳ اگر x و y و z اعضای یک فضای برداری باشند و $x + y = x + z$ ، آنگاه

$$y = z$$

اثبات:

$$y = y + \theta$$

$$= y + (x + (-x)) \quad \text{از تعریف عضو قرینه}$$

$$= (x + y) + (-x) \quad \text{از ویژگی شرکت پذیری}$$

$$= (x + z) + (-x) \quad \text{بنابر فرض}$$

$$= (x + (-x)) + z = \theta + z = z \quad \blacksquare$$

نتیجه ۳-۱-۱ اگر x و y اعضای یک فضای برداری باشند، از $x + y = x$ نتیجه می شود

$$y = \theta$$

اثبات: با توجه به قاعده حذف بدیهی است. $\blacksquare$

قضایای زیر خواصی را که انتظار داریم در مورد فضاهای برداری ثابت می کنند.

قضیه ۳-۱-۴ اگر V یک فضای برداری باشد آنگاه

$$\theta \odot x + \theta \odot x = (\theta + \theta) \odot x = \theta \odot x = \theta, \quad \forall x \in V$$

اثبات:

$$\theta + \theta \odot x = \theta \odot x \quad \text{از تعریف عضو خنثی}$$

$$= (\theta + \theta) \odot x \quad \text{از ویژگی توزیعی اسکالر}$$

$$= \theta \odot x + \theta \odot x \quad \text{پس}$$

حال با حذف بردار $\theta \odot x$ از سمت راست و سمت چپ رابطه فوق داریم

$$\theta \odot x = \theta \quad \blacksquare$$

با توجه به قضیه فوق ملاحظه می شود که هنگام ساخت و تعریف یک فضای

برداری لازم نیست عضو خنثی برای آن مشخص کنیم چون پس از تعریف ضرب

اسکالر، عضو خنثی از رابطه $\theta = 0 \odot x$ مشخص می شود.

قضیه ۳-۱-۵ اگر θ عضو خنثی یک فضای برداری باشد آنگاه

$$c\theta = \theta \quad \forall c \in R$$

اثبات:

$$c\theta + c\theta = c(\theta + \theta) \quad \text{از ویژگی توزیعی برداری}$$

$$= c\theta \quad \text{از تعریف عضو خنثی}$$

$$= c\theta \quad \text{از تعریف عضو خنثی}$$

با حذف بردار $c\theta$ از طرف راست و طرف چپ رابطه فوق داریم

$$c\theta = \theta \quad \blacksquare$$

قضیه ۳-۱-۶ اگر V یک فضای برداری باشد آنگاه قرینه هر عضو V برابر است با

حاصل ضرب اسکالر عدد -1 در آن عضو، یعنی

$$-x = (-1) \odot x, \quad \forall x \in V$$

اثبات: طبق تعریف قرینه داریم

$$x \oplus (-x) = \theta$$

$$= 0 \odot x$$

بنابر قضیه ۳-۱-۴

$$= (1 + (-1)) \odot x$$

$$= (1 \odot x) \oplus ((-1) \odot x) \quad \text{از ویژگی توزیعی اسکالر}$$

$$= x \oplus ((-1) \odot x) \quad \text{از ویژگی (ب) ۷}$$

با حذف x از سمت راست و چپ رابطه فوق داریم

$$-x = (-1) \odot x \quad \blacksquare$$

با توجه به قضیه فوق ملاحظه می شود که هنگام ساخت و تعریف یک فضای

برداري نیازی به تعریف قرینه اعضا نیست چون پس از تعریف ضرب اسکالر قرینه x از

رابطه $-x = -1 \odot x$ مشخص می شود.

قضیه ۳-۱-۷ اگر V یک فضای برداری باشد آنگاه

$$x + x = 2x$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
 x \oplus x &= (1 \odot x) \oplus (1 \odot x) && \text{از ویژگی (ب) } \nu \\
 &= (1 + 1) \odot x && \text{از ویژگی توزیعی اسکالر} \\
 &= 2 \odot x \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

این بخش را با تعریف مفهوم زیر فضا، که به نوع خاصی از زیر مجموعه‌های فضای برداری اطلاق می‌شود، یک قضیه و دو مثال درباره آن به پایان می‌بریم.

تعریف ۳-۱-۲ فرض کنید V یک فضای برداری و W زیر مجموعه‌ای غیرتهی از آن باشد. آنگاه W را یک زیر فضای V می‌نامیم اگر W (نسبت به همان جمع برداری و ضرب اسکالر که بر V حاکم است) خود یک فضای برداری باشد (یعنی دارای ویژگی‌های ده گانه تعریف ۳-۱-۱ باشد).

قضیه زیر تحقیق اینکه زیر مجموعه‌ای از یک فضای برداری در واقع یک زیر فضا است، را بسیار ساده می‌کند.

قضیه ۳-۱-۸ اگر V یک فضای برداری و W زیر مجموعه‌ای غیرتهی از آن باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه W زیر فضای V باشد این است که W تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر حاکم بر V بسته باشد، یعنی

$$x \oplus y \in W, \quad c \odot x \in W, \quad \forall x, y \in W, \quad \forall c \in R$$

اثبات:

(کفایت) در مورد اعضای W نسبت به تعریف ۳-۱-۱

ویژگی‌های (الف i) و (ب i) طبق فرض برقرارند.

ویژگی‌های (الف ii)، (الف iii) و (ب iii) و (ب iv) و (ب v) برقرارند، چون اعضای W اعضای V نیز هستند.

ویژگی (الف iv) برقرار است، زیرا بنابه فرض W غیرخالی است پس دارای عضوی مانند x است آنگاه طبق فرض $x \odot \theta \in W$ یعنی $\theta \in W$. یعنی θ (عضو خنثی V) لزوماً متعلق به W نیز هست.

ویژگی (الف v) برقرار است، زیرا باز هم فرض کنید $x \in W$ آنگاه طبق فرض

$x \in W$ یعنی $(-1) \odot x \in W$. یعنی قرینه هر عضو W متعلق به خود W است.
(لزوم) بدیهی است. ■

هر فضای برداری دو زیر فضای خاص دارد. یکی خود فضای برداری است یعنی $W = V$ و دیگری مجموعه‌ای است که تنها عضو آن بردار صفر (θ) می‌باشد یعنی $W = \{\theta\}$. زیر فضای اخیر را زیر فضای صفر نامیم.

مثال ۳-۱-۵ فرض کنید W مجموعه بردارهای قائم ۳- بعدی (اعضای R^3) باشد که درایه آخر آنها صفر است، یعنی

$$W = \left\{ x \in R^3 \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in R \right\}$$

در مثال ۳-۱-۲ دیدیم که W خود یک فضای برداری است. پس W یک زیر فضای R^3 است. اگر اعضای R^3 را مختصات سه‌گانه فضای سه‌بعدی فیزیکی در یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور افقی و یک محور قائم در نظر بگیریم، آنگاه W نماینده صفحه افقی (موسوم به صفحه xy) است.
از طرفی مجموعه

$$W_1 = \left\{ x \in R^3 \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in R \right\}$$

همان‌طور که در مثال ۳-۱-۳ دیدیم یک فضای برداری نیست و لذا زیر فضای R^3 نمی‌باشد. ■

مثال ۳-۱-۶ فرض کنید (همانند مثال ۳-۱-۴) P_n نشان‌دهنده مجموعه کلیه چندجمله‌ای‌های درجه n یا کمتر باشد. می‌دانیم که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، P_n یک فضای برداری است. حال فرض کنید $m < n$. در این صورت P_m زیر فضای P_n

است، زیرا

$$P_m \subset P_n$$

و ثانیاً واضح است که

$$f+g \in P_m, \quad \forall f, g \in P_m \quad (i)$$

$$cf \in P_m, \quad \forall c \in R, \quad \forall f \in P_m \quad (ii)$$

و بنابر قضیه ۳-۱-۸ P_m زیر فضای P_n است. ■

مجموعه کلیه چند جمله‌ای‌ها که آن را با P نشان می‌دهیم نیز یک فضای برداری است (تمرین) و P_n ، به ازای هر n ، یک زیر فضای P است.

۲-۳ گستره - زیرفضای تولیدی span
این بخش را با یک تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۳-۲-۱ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ای از k بردار عضو فضای برداری V یعنی زیر مجموعه‌ای متناهی از V باشد. بردار y متعلق به V را یک ترکیب خطی از اعضای X می‌نامیم اگر بتوان y را به صورت

$$y = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$$

نوشت که در آن $c_1, \dots, c_k$ اعداد حقیقی هستند.

$$\text{مثال ۳-۲-۱ اگر } X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset R^3, \text{ آنگاه بردار}$$

$$y = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

یک ترکیب خطی از مجموعه ۳ عضوی X است و اگر

$$D = (f, g), \quad f(t) = 2t^2 - t, \quad g(t) = t - 5$$

یک زیر مجموعه ۲ عضوی از P_2 باشد آنگاه بردار

$$h = 4f + 2g$$

یک ترکیب خطی از اعضای D است. در اینجا داریم