

قابل ذکر است که در روش فوق، در جهت تبدیل ماتریس A به ماتریس پلکانی کاهش یافته هر زمان که ماتریس دارای یک سطر صفر شود خواهیم دانست که A وارون پذیر نیست (قضیه ۲-۵-۳) و عملیات را متوقف می‌کنیم.

۲-۶ اعمال مقدماتی، ماتریس‌های مقدماتی و هم‌ارزی ستونی
سه نوع عمل مقدماتی ستونی (شبیه سه نوع عمل مقدماتی سطری) روی ماتریس‌ها می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۲-۶-۱ عمل مقدماتی ستونی نوع I: تعویض جای دو ستون یک ماتریس
عمل مقدماتی ستونی نوع II: ضرب یک ستون ماتریس در عددی مخالف صفر
عمل مقدماتی ستونی نوع III: افزودن مضربی از یک ستون یک ماتریس به ستون دیگر
سه نوع ماتریس مقدماتی ستونی نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۲-۶-۲ ماتریسی را که از انجام یکی از اعمال مقدماتی ستونی نوع I و II و III روی ماتریس واحد به دست می‌آید به ترتیب ماتریس مقدماتی ستونی نوع I و II و III می‌نامیم.

بدیهی است که اگر جای سطرهای i ام و r ام ماتریس واحد را عوض کنیم نتیجه عیناً برابر این است که ستونهای i ام و r ام ماتریس واحد را عوض کرده باشیم. همچنین اگر سطر i ام ماتریس واحد را در عددی مانند $c \neq 0$ ضرب کنیم ماتریس حاصل برابر ماتریسی است که از ضرب ستون i ام ماتریس واحد در c به دست می‌آید. اما به راحتی می‌توان دید که اگر c برابر سطر i ام ماتریس واحد را به سطر r ام آن بیافزاییم ماتریس حاصل برابر ماتریسی است که از افزودن c برابر ستون r ام به ستون i ام ماتریس واحد نتیجه می‌شود.

از مطالب فوق نتیجه می‌شود که مجموعه ماتریس‌های مقدماتی ستونی $n \times n$ با مجموعه ماتریس‌های مقدماتی سطری $n \times n$ برابر است. لذا در بعضی از قضایای

افزودن c به سطر ۱ : $\begin{bmatrix} 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$: افزودن c برابر سطر ۲ به سطر ۱

بخشهای گذشته همان‌طور که در پاورقی تذکر داده شده است، ذکر کلمه «سطری» برای ماتریس‌های مقدماتی لازم نیست.

تعریف ۲-۶-۳ ماتریس A را هم‌ارز ستونی ماتریس B می‌نامیم و با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم اگر بتوان به وسیله اعمال مقدماتی ستونی از A به B رسید.

هم‌ارزی ستونی نیز مانند هم‌ارزی سطری دارای ویژگیهای سه‌گانه انعکاسی، تقارن و تعدی است. انجام یک عمل مقدماتی ستونی روی یک ماتریس معادل است با ضرب آن ماتریس از سمت راست در یک ماتریس مقدماتی ستونی متناظر با همان عمل مقدماتی ستونی. یعنی

قضیه ۲-۶-۱ اگر A یک ماتریس $n \times k$ و B ماتریس حاصل از انجام یک عمل مقدماتی ستونی روی ماتریس A و F یک ماتریس مقدماتی ستونی $k \times k$ حاصل از انجام همان عمل مقدماتی ستونی روی ماتریس I_k باشد آنگاه

$$B = AF \quad \text{اثبات: مشابه اثبات قضیه ۲-۶-۱}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

قضیه ۲-۶-۲ دو ماتریس A و B هم‌ارز ستونی هستند اگر و تنها اگر ماتریس‌های $F_1, \dots, F_c$ وجود داشته باشند طوری که

$$B = AF_1 \dots F_c$$

■ اثبات: مانند حالت سطری

قضیه زیر نیز با توجه به یکی بودن مجموعه کلیه ماتریس‌های مقدماتی سطری و ستونی (در یک بعد خاص) بدیهی است.

قضیه ۲-۶-۳ هر ماتریس مقدماتی ستونی وارون‌پذیر است و وارون آن یک ماتریس مقدماتی ستونی از همان نوع است.

همتای ستونی قضایای ۲-۴-۶، ۲-۵-۱، ۲-۵-۲ و ۲-۵-۳ و نتایج ۲-۵-۱، ۲-۵-۲ و ۲-۵-۳ نیز برقرار است و اثبات آنها مشابه حالت سطری آنها است.

تعریف ۴-۶-۲ دو ماتریس A و B را هم‌ارز می‌نامیم (و با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم) اگر بتوان به وسیله اعمال مقدماتی سطری و ستونی از A به B رسید.

توجه کنید که اگر A و B هم‌ارز سطری (یا ستونی) باشند هم‌ارز هستند ولی هم‌ارز بودن لزوماً هم‌ارزی سطری (یا ستونی) را نتیجه نمی‌دهد. هم‌ارزی دو ماتریس نیز مانند هم‌ارزی سطری و ستونی دارای ویژگیهای سه‌گانه انعکاس، تقارن و تعدی است. با توجه به قضیه ۴-۶-۱ و همتای سطری آن قضیه زیر بدیهی است.

قضیه ۴-۶-۲ دو ماتریس A و B هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر ماتریس‌های مقدماتی $E_1, \dots, E_r$ و $F_1, \dots, F_c$ وجود داشته باشد به طوری که

$$B = E_r \cdots E_1 A F_1 \cdots F_c$$

قضیه ۵-۶-۲ ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر A هم‌ارز ماتریس واحد باشد. اثبات:

(کفایت) اگر A هم‌ارز I باشد بنابر قضیه قبل ماتریس‌های مقدماتی $E_1, \dots, E_r$ و $F_1, \dots, F_c$ وجود دارد طوری که

$$A = E_r \cdots E_1 I F_1 \cdots F_c$$

پس داریم (نتیجه ۱-۳-۱)

$$A^{-1} = F_c^{-1} \cdots F_1^{-1} E_1^{-1} \cdots E_r^{-1}$$

(لزوم) اگر A وارون‌پذیر باشد، هم‌ارز سطری I است (قضیه ۲-۵-۱) و در نتیجه طبق تعریف هم‌ارز I می‌باشد. ■

قضیه ۶-۶-۲ دو ماتریس A و B هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر دو ماتریس نامنفرد P و Q وجود داشته باشد به قسمی که

$$B = PAQ$$

اثبات: با توجه به قضیه ۴-۶-۲ و با توجه به اینکه هر ماتریس نامنفرد را به صورت حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی می‌توان نوشت نتیجه محقق است. ■

قضیه صفحه بعد راه‌گشای اثبات بعضی از قضایای فصول بعد است.

قضیه ۲-۶-۷ (قضیهٔ تحویل‌پذیری) فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ باشد. آنگاه A هم‌ارز ماتریسی است که می‌توان آن را به صورت

$$\Delta = \begin{bmatrix} I & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix}$$

افراز کرد.

اثبات: می‌دانیم که با انجام اعمال مقدماتی سطری می‌توانیم A را به یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته تبدیل کنیم. با انتقال ستونهای دارای درایهٔ پیشرو (عمل مقدماتی ستونی) در ماتریس اخیر به سمت چپ ماتریس، می‌توان آن را به شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & \vdots & U \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

درآورد. حال در ماتریس فوق با افزودن مضارب مناسبی از ستونهای

قسمت $\begin{bmatrix} I \\ \dots \\ O \end{bmatrix}$ به ستونهای قسمت $\begin{bmatrix} U \\ \dots \\ O \end{bmatrix}$ (اعمال مقدماتی ستونی) قسمت اخیر را می‌توانیم به صفر تبدیل کنیم و در نتیجه ماتریس به شکل مذکور در صورت قضیه درخواهد آمد. ■

نتیجه ۲-۶-۱ اگر A یک ماتریس $n \times k$ باشد، آنگاه ماتریس‌های نامنفرد P و Q وجود دارند طوری که

$$A = P \begin{bmatrix} I & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix} Q$$

اثبات: از دو قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود. ■

خودآزمایی

- ۱-۲ آیا اگر A منفرد باشد، آنگاه لزوماً دستگاه خطی $Ax = b$ بی‌نهایت جواب دارد؟
- ۲-۲ آیا اگر دو تا ماتریس P و Q وجود داشته باشند طوری که $B = PAQ$ ، آنگاه لزوماً A و B هم‌ارز هستند؟

۳-۲ اگر دستگاه $Ax = 0$ فاقد جواب غیر بدیهی باشد، آنگاه شکل پلکانی سطری