

به سادگی می‌توان نشان داد (تمرین) که تعداد اشکال مختلف ماتریس‌های مقدماتی سطری $n \times n$ از نوع I و II و III به ترتیب برابر n ، $\frac{n!}{2!(n-2)!}$ و $\frac{n!}{(n-2)!}$ است. ■
 دلیل تعریف ماتریس‌های مقدماتی سطری این است که از ضرب یک ماتریس مقدماتی سطری از سمت چپ در یک ماتریس مانند A همان ماتریسی به دست می‌آید که از اعمال عمل مقدماتی متناظر روی A حاصل می‌شود. یعنی

قضیه ۲-۴-۳ اگر A یک ماتریس $n \times k$ و B ماتریسی باشد که از انجام یک عمل مقدماتی روی ماتریس A حاصل می‌شود و E یک ماتریس مقدماتی سطری $n \times n$ حاصل از انجام همان عمل مقدماتی سطری روی I_n باشد، آنگاه

$$B = EA$$

اثبات: (نوع I) فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی نوع I (متناظر با تعویض جای سطرهای اول و دوم در ماتریس I_n) است. داریم

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

با استفاده از ضرب ماتریس‌های افزاز شده (در اینجا فقط A افزاز شده است) داریم

$$EA = \begin{bmatrix} a'_2 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

که همان نتیجه مطلوب است. اثبات برای بقیه ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع I ، مشابه است.

(نوع II) فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی سطری نوع II (متناظر با ضرب سطر اول ماتریس I_n در یک عدد $c \neq 0$) است. داریم:

$$EA = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

(نوع III) فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی سطری نوع III (متناظر با افزودن c برابر سطر دوم I_n به سطر اول آن) است. داریم:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 + ca'_2 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} & \dots & a_{1n} + ca_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

واثبات کامل است. $\blacksquare$

قضیه ۲-۴-۴ ماتریس‌های A و B هم‌ارز سطری هستند اگر و تنها اگر ماتریس‌های مقدماتی سطری $E_1, \dots, E_r$ وجود داشته باشند طوری که

$$B = E_r \cdots E_1 A$$

اثبات:

(کفایت) بنابر قضیه قبل $E_1 A$ برابر ماتریسی است که از انجام یک عمل مقدماتی سطری روی A حاصل می‌شود، $E_2 E_1 A$ ماتریسی است که از انجام یک عمل مقدماتی روی $E_1 A$ انجام می‌شود و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که ماتریس $E_r \cdots E_1 A$ ماتریسی است که از انجام r عمل مقدماتی سطری روی A به دست می‌آید. پس B هم‌ارز سطری A است، یعنی A و B هم‌ارز سطری هستند.

(لزوم) فرض کنید A و B هم‌ارز سطری هستند. پس طبق تعریف ماتریس B را می‌توان به وسیله تعدادی عمل مقدماتی سطری (مثلاً r تا) از A به دست آورد. چون هر عمل مقدماتی را می‌توان به وسیله ضرب در یک ماتریس مقدماتی انجام داد نتیجه می‌گیریم که

$$B = E_r \cdots E_1 A \blacksquare$$

قضیه ۲-۴-۵ هر ماتریس مقدماتی سطری وارون‌پذیر است و وارون آن یک ماتریس مقدماتی سطری از همان نوع است.



اثبات: (نوع I) ماتریس

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

را که یک ماتریس مقدماتی سطری نوع I است در نظر بگیرید: طبق قضیه ۲-۴-۳ اگر این ماتریس از سمت چپ در ماتریسی مانند A ضرب شود جای سطرهای اول و دوم ماتریس A را عوض می‌کند. حال اگر A را برابر I (ماتریس واحد) بگیریم داریم

$$EEI = I$$

یعنی

$$E^{-1} = E$$

که بنابر تعریف وارون، ماتریس E وارون خودش است یعنی

$$E^{-1} = E$$

اثبات برای سایر انواع ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع I مشابه است.

(نوع II) ماتریس‌های

$$E_1 = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

را که ماتریس‌های مقدماتی نوع II هستند در نظر بگیرید. طبق قضیه ۲-۴-۳ اگر ماتریس E_1 از سمت چپ در ماتریسی مانند A ضرب شود سطر اول A در c و اگر ماتریس E_2 از سمت چپ در ماتریس A ضرب شود سطر اول A در $\frac{1}{c}$ ضرب می‌شود حال اگر A را برابر I (ماتریس واحد) بگیریم داریم

$$E_2 E_1 I = I$$

$$E_2 E_1 = I$$

یعنی

به طریق مشابه داریم

$$E_1 E_2 = I$$

پس طبق تعریف وارون یک ماتریس، E_1 وارون E_1 است. اثبات برای سایر ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع II، مشابه است.

(نوع III) ماتریس‌های

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

را که هر دو ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع III هستند در نظر بگیرید. اگر E_1 از سمت چپ در ماتریسی مانند A ضرب شود، c برابر سطر دوم A با سطر اول آن جمع می‌شود و در صورتی که حاصل در E_2 ضرب شود c برابر سطر دوم آن از سطر اول کم می‌شود. پس اگر A را برابر I بگیریم داریم

$$E_2 E_1 I = I$$

یعنی

$$E_2 E_1 = I$$

به طریق مشابه داریم

$$E_1 E_2 = I$$

پس E_2 وارون E_1 است. ■

اکنون قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم که در اثبات بعضی از قضایای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه ۲-۴-۶ اگر A یک ماتریس مربع باشد آنگاه معادله ماتریسی $Ax = 0$ فقط دارای جواب بدیهی $x = 0$ است اگر و تنها اگر A هم‌ارز سطری I (ماتریس واحد) باشد. اثبات:

(کفایت) فرض کنید A هم‌ارز سطری I است پس ماتریس‌های مقدماتی سطری

$E_1, \dots, E_r$ وجود دارند طوری که

$$A = E_r \cdots E_1 I$$

$$Bx = c \xrightarrow[\text{ب.ب.}]{\text{مکرومتر}} B^{-1} Bx = B^{-1} c \quad \text{جبر خطی برای آمار} \\ \hookrightarrow Ix = B^{-1} c \rightarrow x = B^{-1} c$$

یا

$$A = E_r \cdots E_1$$

پس معادله $Ax = 0$ را می توان به صورت

$$E_r \cdots E_1 x = 0 \rightarrow \underbrace{E_r^{-1} E_r^{-1} \cdots E_1^{-1}}_I x = E_r^{-1} 0 = 0$$

نوشت. حال اگر طرفین رابطه فوق را از سمت چپ به ترتیب در $E_1^{-1}, \dots, E_r^{-1}$

ضرب کنیم. داریم

$$\rightarrow E_{r-1} \cdots E_1 x = 0 \cdots \xrightarrow{I} x = 0$$

$$Ax = 0$$

$$[A \mid 0]$$

با اعمال سطر
صفر

$$[B \mid 0]$$

$$\downarrow Bx = 0$$

(لزوم) فرض کنید B ماتریسی باشد که از تبدیل ماتریس A به شکل پلکانی

سطری کاهش یافته حاصل می شود. چون ستون آخر ماتریس افزوده معادله $Ax = 0$ یک

ستون صفر است، اعمال مقدماتی سطری آن را تغییر نمی دهند، پس دستگاه $Ax = 0$ با

دستگاه $Bx = 0$ معادل است. (به این معنی که جوابهای یکی جوابهای دیگری نیز هست)

حال فرض کنید B یک سطر صفر دارد در این صورت اگر B_1 ماتریسی باشد که

پس از حذف سطر صفر از ماتریس B حاصل می شود، دستگاه $Bx = 0$ معادل دستگاه

$B_1 x = 0$ است. اما طبق قضیه ۱-۲-۲ دستگاه اخیر بینهایت جواب دارد که مخالف

فرض است. پس B دارای سطر صفر نیست و طبق قضیه ۲-۳-۲ داریم $B = I$ و اثبات

صفحه ۳۲

کامل است. ■

۵-۲ هم ارزی سطری و وارون پذیری

در این بخش قضایایی را در مورد رابطه وارون پذیری یک ماتریس و هم ارزی سطری آن

با ماتریس های دیگر بیان و اثبات می کنیم.

قضیه ۲-۵-۱ ماتریس مربع A وارون پذیر (نامنفرد) است اگر و تنها اگر هم ارز سطری I

(ماتریس واحد) باشد.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید A هم ارز سطری I باشد در این صورت ماتریس های

مقدماتی سطری $E_1, \dots, E_r$ وجود دارد طوری که

$$A = E_r \cdots E_1 I$$

یعنی

$$A = E_r \cdots E_1$$

اگر طرفین رابطه فوق را از سمت راست به ترتیب در $E_1^{-1}, \dots, E_r^{-1}$ ضرب کنیم داریم

$$AE_1^{-1} \cdots E_r^{-1} = I$$

یعنی ماتریس $B = E_1^{-1} \cdots E_r^{-1}$ وارون راست A است. به طریق مشابه می‌توان نشان

داد که B وارون چپ A نیز هست پس B وارون A است یعنی A وارون‌پذیر است.

(لزوم) فرض کنید A نامنفرد است. حال اگر طرفین معادله

$$Ax = 0$$

را از سمت چپ در A^{-1} (که طبق فرض وجود دارد) ضرب کنیم داریم

$$A^{-1}Ax = A^{-1}0$$

یا

$$x = 0$$

یعنی $x = 0$ تنها جواب معادله $Ax = 0$ است و بنابر قضیه ۲-۴-۶ A هم‌ارز سطری I

است. ■

نتیجه ۲-۵-۱ اگر $A^R B$ آنگاه A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر B وارون‌پذیر باشد.

اثبات: با توجه به ویژگی تعدی هم‌ارزی سطری، بدیهی است. ■

نتیجه ۲-۵-۲ ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر A را بتوان به صورت

حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی (سطری)* نوشت.

اثبات: با توجه به اینکه برابر بودن A با حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی، معادل است

با اینکه A هم‌ارز سطری I باشد، اثبات بدیهی است. ■

نتیجه ۲-۵-۳ ماتریس A نامنفرد است اگر و تنها اگر معادله $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی

$x = 0$ را داشته باشد.

اثبات: با توجه به قضایای ۲-۴-۶ و ۲-۵-۱ بدیهی است. ■

* در بخش بعد خواهیم دید که مجموعه کلیه ماتریس‌های مقدماتی سطری با مجموعه کلیه ماتریس‌های مقدماتی ستونی برابر است لذا کلمه سطری در اینجا لازم نیست.

قضیه ۲-۵-۲ اگر ماتریس مربع C یک سطر صفر داشته باشد آنگاه C منفرد است. (وارون‌پذیر نیست)

اثبات: فرض کنید B وارون C است در این صورت

$$CB = I = \text{ماتریس واحد}$$

اما بنابر قضیه ۱-۴-۱ باید دارای لااقل یک سطر صفر باشد که با برابر بودن آن با I متناقض است، و لذا حکم ثابت است. ■

قضیه ۲-۵-۳ ماتریس مربع A منفرد است اگر و تنها اگر هم‌ارز سطری ماتریسی مانند C باشد که دارای لااقل یک سطر صفر است. یعنی اگر سطر از تبیل به هم سطری پلکانی بگیر
اثبات: سطر صفر می‌دهد، A معکوس نپذیرد.

(کفایت) چون C لااقل یک سطر صفر دارد منفرد است (قضیه ۲-۵-۲) و چون

A هم‌ارز سطری C است A نیز منفرد است (نتیجه ۲-۵-۱)

(لزوم) A را به شکل پلکانی سطری کاهش یافته تبدیل می‌کنیم و ماتریس حاصل

را C می‌نامیم. چون A منفرد است $C \neq I$ (قضیه ۲-۵-۱). چون A مربع است، C

دارای لااقل یک سطر صفر است (قضیه ۲-۳-۲). چون A هم‌ارز سطری C است اثبات

کامل می‌باشد. ■

قضیه زیر نشان می‌دهد که برای اثبات وارون‌پذیری یک ماتریس مربع کافیت

نشان دهیم که آن ماتریس وارون راست (یا چپ) دارد.

قضیه ۲-۵-۴ اگر ماتریس A مربع و ماتریس B وارون راست (یا چپ) A باشد، آنگاه A

وارون‌پذیر است و $A^{-1} = B$

$$AB = I \Rightarrow BA = I$$

اثبات: در ماتریس A سطر صفری قرار نگیرد.

(برای وارون راست): فرض کنید A وارون‌پذیر نباشد آنگاه A هم‌ارز سطری

ماتریسی مانند C است که لااقل یک سطر صفر دارد (قضیه ۲-۵-۳). پس وجود دارد

ماتریس‌های مقدماتی سطری $E_1, \dots, E_r$ طوری که

$$C = E_r \cdots E_1 A$$

$$CB = E_r \cdots E_1 AB$$

پس

اما CB لااقل یک سطر صفر دارد (قضیه ۱-۴-۱) و هم‌ارز سطری AB است پس AB

۴۳ ماتریس‌های پلکانی، هم ارزی ماتریس‌ها و ...

منفرد است (قضیه ۲-۵-۳) و این با فرض قضیه که $AB = I$ است تناقض دارد و لذا حکم ثابت است.

(برای وارون چپ): فرض کنید $BA = I$. پس داریم

$$A'B' = I$$

پس طبق قسمت اول اثبات B' وارون A' است و بنابر قضیه ۱-۳-۲ B وارون A است. ■

قضیه زیر یادآور قضیه ۲-۵-۳ است و در اثبات آن از قضیه مزبور استفاده می‌شود.

قضیه ۲-۵-۵ ماتریس مربع A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر معادله

$$Ax = b \quad (۱-۵-۲)$$

که در آن b یک ماتریس ستونی مفروض است، جواب یکتا داشته باشد. اثبات:

(کفایت) فرض کنید c جواب یکتای معادله (۱-۵-۲) باشد. پس داریم

$$Ac = b$$

حال در جهت استفاده از برهان خلف فرض کنید A وارون‌پذیر نباشد. در این صورت معادله $Ax = 0$ دارای جواب غیربدیهی است (قضیه ۲-۵-۳). فرض کنید $d \neq 0$ این جواب غیربدیهی باشد. آنگاه داریم

$$Ad = 0$$

با جمع کردن طرفین رابطه فوق با طرفین رابطه (۱-۵-۲) داریم

$$A(c + d) = b$$

یعنی $x = c + d$ جواب دیگری برای معادله $Ax = b$ است که خلاف فرض می‌باشد. (لزوم) اگر A وارون‌پذیر باشد، با ضرب A^{-1} از سمت چپ در طرفین رابطه (۱-۵-۲) داریم

$$A^{-1}Ax = b$$

یعنی

$$x = A^{-1}b$$

و اثبات کامل است. ■

نتیجه ۲-۵-۴ با توجه به قضایای این بخش موارد زیر با هم معادل‌اند.

- الف) ماتریس مربع A وارون‌پذیر است.
 ب) A هم‌ارز سطری ماتریس واحد است.
 پ) A رامی‌توان به صورت حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی (سطری)* نوشت.
 ت) معادله همگن $Ax = 0$ فقط دارای جواب بدیهی $x = 0$ است.
 ث) A هم‌ارز سطری هیچ ماتریسی نیست که دارای لااقل یک سطر صفر باشد.
 ج) معادله $Ax = b$ ، که در آن b یک ماتریس ستونی مفروض است، جواب یکتا دارد.

اینک در موقعیتی هستیم که می‌توانیم یک روش ساده و عملی که آن را روش «عمل به مثل» می‌نامیم، برای پیدا کردن وارون یک ماتریس وارون‌پذیر ارائه دهیم. اگر A وارون‌پذیر باشد طبق قضیه ۲-۵-۱ ماتریس‌های مقدماتی سطری $E_1, \dots, E_r$ وجود دارند طوری که

$$I = E_r \cdots E_1 A$$

با ضرب طرفین رابطه فوق از A^{-1} داریم.

$$A^{-1} = E_r \cdots E_1$$

دو رابطه اخیر را می‌توان به این صورت بیان کرد که: اگر با انجام تعدادی اعمال مقدماتی سطری روی ماتریس A این ماتریس به ماتریس واحد تبدیل شود انجام همان اعمال مقدماتی سطری و به همان ترتیب روی ماتریس واحد آن را به A^{-1} تبدیل می‌کند. پس یک راه برای به دست آوردن وارون یک ماتریس وارون‌پذیر مانند A این است که ابتدا به وسیله اعمال مقدماتی سطری ماتریس A را به ماتریس واحد تبدیل کنیم (که می‌دانیم امکان‌پذیر است چون هر ماتریس نامنفرد هم‌ارز سطری ماتریس واحد است. برای این کار کافیهست A را به یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته تبدیل کنیم) و سپس همان اعمال مقدماتی سطری را روی ماتریس واحد اعمال کنیم تا ماتریس A^{-1} به دست آید.

در عمل ماتریس I را پهلوی ماتریس A نوشته و هر عمل مقدماتی سطری که در

* با توجه به یکی بودن مجموعه ماتریس‌های مقدماتی سطری و مجموعه ماتریس‌های مقدماتی ستونی که در بخش بعدی بیان می‌شود ذکر کلمه «سطری» لزومی ندارد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix} \neq I_3$$

نکته: اگر $[A_{n \times n} : I_n]$ با اعمال سطری مقدماتی به ماتریس

$$[I_n : B_{n \times n}] \text{ تبدیل شود، در این صورت } B = A^{-1}$$

دلیل: ماتریس مقدماتی متناظر با اعمال مورد نظر را $E_1, \dots, E_r$ و حاصل

$$\rightarrow E_r \dots E_1 [A : I] = [I : B]$$

$$\begin{cases} E_r \dots E_1 A = I \\ E_r \dots E_1 I = B \end{cases}$$

لذا

$$\rightarrow B = E_r \dots E_1$$

$$B = A^{-1} \quad \text{و لذا} \quad AB = I \quad \leftarrow \quad BA = I$$

این نکته در واقع یک روش برای محاسبه معکوس ماتریس مربعی تبدیل می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

موضوع:

$$[A:I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-1) \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-1) \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \times (-1)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-2) \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-3) \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times 3 \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جهت تبدیل A به I (به یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته) انجام می‌دهیم روی ماتریس I نیز اعمال می‌کنیم. زمانی که A به ماتریس واحد تبدیل شود ماتریس I نیز به ماتریس A^{-1} تبدیل خواهد شد.

مثال ۲-۵-۱ فرض کنید می‌خواهیم وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را بیابیم. به صورت زیر عمل می‌کنیم.

A	I_3	
۱ ۰ ۲	۱ ۰ ۰	سطر اول را به سطر دوم و ۲- برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزایم.
-۱ ۱ ۰	۰ ۱ ۰	
۲ ۱ ۲	۰ ۰ ۱	
۱ ۰ ۲	۱ ۰ ۰	۱- برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزایم.
۰ ۱ ۲	۱ ۱ ۰	
۰ ۱-۲	-۲ ۰ ۱	
۱ ۰ ۲	۱ ۰ ۰	سطر سوم را بر ۴- تقسیم می‌کنیم.
۰ ۱ ۲	۱ ۱ ۰	
۰ ۰ -۴	-۳-۱ ۱	
۱ ۰ ۲	۱ ۰ ۰	۲- برابر سطر سوم را به سطر اول و سطر دوم می‌افزایم
۰ ۱ ۲	۱ ۱ ۰	
۰ ۰ ۱	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$	
۱ ۰ ۰	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	ماتریس سمت راست وارون A است.
۰ ۱ ۰	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	
۰ ۰ ۱	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$	

یعنی

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

یس ها و ... ۴۵

جام می دهیم روی
د ماتریس I نیز به

$A =$ را بیابیم.

A	I
۱ ۰ ۲	۱ ۰
-۱ ۱ ۰	۰ ۱
۲ ۱ ۲	۰ ۰
۱ ۰ ۲	۱ ۰
۰ ۱ ۲	۱ ۱
۰ ۱ -۲	-۲ ۰
۱ ۰ ۲	۱ ۰ ۰
۰ ۱ ۲	۱ ۱ ۰
۰ ۰ -۴	-۳ -۱ ۱
۱ ۰ ۲	۱ ۰ ۰
۰ ۱ ۲	۱ ۱
۰ ۰ ۱	۳ ۱
۱ ۰ ۰	$\frac{-1}{4}$ $\frac{-1}{4}$
۰ ۱ ۰	$\frac{-1}{2}$ $\frac{-1}{2}$
۰ ۰	$\frac{-1}{2}$ $\frac{-1}{4}$