

دستگاه‌های مربوط به H_1 و H_3 و H_4 دارای چهار معادله و چهار مجهول هستند. در صورتی که دستگاه مربوط به H_2 دارای سه معادله و چهار مجهول است. ■

قضیه ۲-۲-۱ اگر A یک ماتریس $n \times k$ و $n < k$ باشد آنگاه $x = 0$ تنها جواب معادله ماتریسی $Ax = 0$ نیست.

اثبات: چون حاصلضرب هر ماتریس در یک ماتریس صفر برابر صفر است، بدیهی است که معادله $Ax = 0$ یک جواب $x = 0$ دارد. فرض کنید B ماتریسی باشد که از تبدیل A به ماتریس پلکانی سطری حاصل می‌شود. چون اعمال مقدماتی سطری بر روی ستونهای صفر بی‌تأثیراند، دو دستگاه $Ax = 0$ و $Bx = 0$ معادل‌اند. (زیرا ماتریس افزوده دستگاه دوم به وسیله اعمال مقدماتی سطری از ماتریس افزوده دستگاه اول به دست می‌آید). اما B یک ماتریس $n \times k$ به شکل پلکانی سطری است و $n < k$. پس طبق استدلال قسمت (ب) (بلافاصله قبل از مثال ۲-۲-۳) باید در دستگاه $Bx = 0$ مقادیر بعضی از مجهولات اختیاری باشد و دستگاه بینهایت جواب دارد و اثبات کامل است. ■

۲-۳ روش گاوس - جردن

برای حل دستگاه‌های خطی روش دیگری وجود دارد که در آن پس از تبدیل ماتریس افزوده به ماتریس پلکانی سطری ماتریس حاصل باز هم ساده‌تر می‌شود. به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۲-۳-۱ یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته، یک ماتریس پلکانی سطری است که درایه‌های بالای هر درایه پیشرو نیز صفر باشند.

بدیهی است هنگامی که یک ماتریس به شکل پلکانی سطری باشد، با افزودن مضارب مناسبی از سطرهاى پایین‌تر به سطرهاى بالاتر می‌توان ماتریس را به شکل پلکانی سطری کاهش یافته درآورد.
پس قضیه زیر را می‌پذیریم.

قضیه ۲-۳-۱ هر ماتریس $n \times k$ مانند A را می‌توان به وسیله اعمال مقدماتی سطری به

یک ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل کرد.

مثال ۲-۳-۱ ماتریس‌های زیر به شکل پلکانی سطری کاهش یافته هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

به راحتی می‌توان پذیرفت که اگر در یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته مربع، همه ستونها دارای درایه پیشرو باشند، آن ماتریس باید برابر ماتریس واحد (I) باشد. در واقع قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۳-۲ فرض کنید A یک ماتریس مربع به شکل پلکانی سطری کاهش یافته است. در این صورت یا A لااقل یک سطر صفر دارد یا $A = I$.

اثبات: اگر A یک سطر صفر داشته باشد حکم برقرار است. پس فرض کنیم هیچ کدام از سطرها A صفر نباشد، بنابراین هر سطر باید یک درایه پیشرو داشته باشد. چون A مربع است و درایه پیشرو هر سطر باید در سمت راست درایه پیشرو سطر قبل باشد، باید درایه‌های قطر اصلی A همگی ۱ باشند و چون A به شکل پلکانی سطری کاهش یافته است باید بقیه درایه‌های A صفر باشند. پس A ماتریس واحد است. $\blacksquare$

حل دستگاه هنگامی که ماتریس افزوده به ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته تبدیل شده باشد، ساده‌تر است. این روش حل دستگاهها به روش گاوس - جردن معروف است.

دو مثال زیر نحوه استفاده از این روش را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۳-۲ دستگاه مثال ۲-۲-۱ را به روش گاوس - جردن حل می‌کنیم. داریم

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

با افزودن ۴- برابر سطر دوم به سطر اول داریم

۳۳ ماتریس‌های پلکانی، هم ارزی ماتریس‌ها و ...

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} = \text{ماتریس پلکانی کاهش یافته}$$

پس دستگاه مثال ۲-۲-۱ با دستگاه

$$\begin{cases} 1 \times x_1 = 1 \\ 1 \times x_2 = 2 \end{cases}$$

معادل است. ملاحظه می‌شود که برای یافتن جواب (مقادیر x_1 و x_2) هیچگونه محاسبه‌ای لازم نیست و داریم $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$. ■

مثال ۲-۳-۳ اگر بخواهیم دستگاه مثال ۲-۲-۲ را به روش گاوس - جردن حل کنیم داریم

$$H = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

با افزودن ۲- برابر سطر سوم به سطرهای اول و دوم، ماتریس

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

را خواهیم داشت. با افزودن سطر دوم به سطر اول، ماتریس

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

را خواهیم داشت. این ماتریس به شکل ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته است و

معادل است با دستگاه

$$\begin{cases} x_1 & -8x_4 = 8 \\ & x_2 & -6x_4 = 6 \\ & & x_3 + \frac{3}{2}x_4 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

حال اگر مقدار اختیاری x_4 را برابر t بگیریم داریم

$$\begin{cases} x_1 = 8 + 8t \\ x_2 = 6 + 6t \\ x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \\ x_4 = t \end{cases}$$

که البته همان جوابهای مثال ۲-۲-۲ است. ■

۴-۲ هم‌ارزی سطری

اعمال مقدماتی سطری نقش مهمی را در اثبات قضایای مربوط به ماتریس‌ها (به روشی که در این کتاب پیش گرفته‌ایم) ایفا می‌کنند. ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۴-۲-۱ گوئیم ماتریس A هم‌ارز سطری ماتریس B است (و آن را با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم) هرگاه بتوان به وسیلهٔ اعمال مقدماتی سطری از A به B رسید. چون عکس هر عمل مقدماتی سطری خود یک عمل مقدماتی سطری است رابطهٔ «هم‌ارزی سطری» یک رابطهٔ متقارن است، یعنی اگر A هم‌ارز سطری B باشد، B نیز هم‌ارز سطری A خواهد بود. ضمناً بدیهی است که هر ماتریس هم‌ارز سطری خود است و اگر A هم‌ارز سطری B و B هم‌ارز سطری C باشد آنگاه A هم‌ارز سطری C است پس «هم‌ارزی سطری» یک رابطهٔ هم‌ارزی است و مجموعهٔ ماتریس‌های هم‌بُعد را به کلاسهای هم‌ارزی افراز می‌کند.

باتوجه به تعریف فوق قضایای ۲-۱-۱ و ۲-۳-۱ را می‌توان به ترتیب به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2, \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_2 \times (-\frac{3}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{3}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

فرم استاندارد را می‌توانیم به دست آوریم

مجموعه‌ای را محاسبه می‌کنیم که از بردارهای نقطه x_1, x_2 در E و به خود وصل می‌شود. $E \subset \mathbb{R}^m$

گفته‌اند که این مجموعه در E باید باشد.

$\forall x_1 \neq x_2 \in E : \{ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : 0 \leq \lambda \leq 1 \} \subseteq E$

فقط بین x_1, x_2 جمع

نکته: مجموعه جوابها $AX=b$ محدب است. (در صورتی که نامرکز باشد)

۱۸ May 2012
۲۶ جمادی الثانیة ۱۴۳۳

دلیل: اگر $x_1 \neq x_2$ جواب باشند:

$Ax_1 = b, Ax_2 = b \rightarrow A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$

اگر مجموعه جوابها یک نقطه‌ای باشد به انتفاخ مقدم محدب است.

می‌نوش بابت اب ای ماه کرامه
بسیار تابد و نیاید مارا

قضیه ۲-۴-۱ هر ماتریس، هم‌ارز سطری یک ماتریس پلکانی سطری است.

قضیه ۲-۴-۲ هر ماتریس، هم‌ارز سطری یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته است.

ابزار دیگری که برای اثبات بعضی از قضایا در فصول بعد به کار می‌رود ماتریس‌های مقدماتی سطری هستند که ذیلاً تعریف می‌شوند.

تعریف ۲-۴-۲ یک ماتریس مقدماتی سطری، ماتریسی است که از انجام یک عمل مقدماتی بر روی ماتریس واحد (I) حاصل می‌شود.

از تعریف فوق و از اینکه سه نوع عمل مقدماتی سطری داریم نتیجه می‌گیریم که ماتریس‌های مقدماتی سطری همگی مربع بوده و بر سه نوع‌اند.

ماتریس مقدماتی سطری نوع I : ماتریسی است که از تعویض جای دو سطر ماتریس واحد حاصل می‌شود.

ماتریس مقدماتی سطری نوع II : ماتریسی است که از ضرب یک سطر ماتریس واحد در یک عدد غیر صفر حاصل می‌شود.

ماتریس مقدماتی سطری نوع III : ماتریسی است که از افزودن مضربی از یک سطر ماتریس واحد به سطر دیگر آن حاصل می‌شود.

مثال ۲-۴-۱ مجموعه کلیه ماتریس‌های مقدماتی سطری 2×2 عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نوع } I$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad c \neq 0 \quad \text{نوع } II$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad \text{نوع } III$$

به سادگی می‌توان نشان داد (تمرین) که تعداد اشکال مختلف ماتریس‌های مقدماتی سطری $n \times n$ از نوع I و II و III به ترتیب برابر n ، $\frac{n!}{2!(n-2)!}$ و $\frac{n!}{(n-2)!}$ است. ■
 دلیل تعریف ماتریس‌های مقدماتی سطری این است که از ضرب یک ماتریس مقدماتی سطری از سمت چپ در یک ماتریس مانند A همان ماتریسی به دست می‌آید که از اعمال عمل مقدماتی متناظر روی A حاصل می‌شود. یعنی

قضیه ۲-۴-۳ اگر A یک ماتریس $n \times k$ و B ماتریسی باشد که از انجام یک عمل مقدماتی روی ماتریس A حاصل می‌شود و E یک ماتریس مقدماتی سطری $n \times n$ حاصل از انجام همان عمل مقدماتی سطری روی I_n باشد، آنگاه

$$B = EA$$

اثبات: (نوع I) فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی نوع I (متناظر با تعویض جای سطرهاى اول و دوم در ماتریس I_n) است. داریم

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

با استفاده از ضرب ماتریس‌های افزاز شده (در اینجا فقط A افزاز شده است) داریم

$$EA = \begin{bmatrix} a'_2 \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

که همان نتیجه مطلوب است. اثبات برای بقیه ماتریس‌های مقدماتی سطری نوع I، مشابه است.

(نوع II) فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی سطری نوع II (متناظر با ضرب سطر اول ماتریس I_n در یک عدد $c \neq 0$) است. داریم:

$$EA = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

(نوع III) فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی سطری نوع III (متناظر با افزودن c برابر سطر دوم I_n به سطر اول آن) است. داریم:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 + ca'_2 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

و اثبات کامل است. ■

قضیه ۲-۴-۴ ماتریس‌های A و B هم‌ارز سطری هستند اگر و تنها اگر ماتریس‌های مقدماتی سطری $E_1, \dots, E_r$ وجود داشته باشند طوری که

$$B = E_r \cdots E_1 A$$

اثبات:

(کفایت) بنابر قضیه قبل $E_1 A$ برابر ماتریسی است که از انجام یک عمل مقدماتی سطری روی A حاصل می‌شود، $E_2 E_1 A$ ماتریسی است که از انجام یک عمل مقدماتی روی $E_1 A$ انجام می‌شود و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که ماتریس $E_r \cdots E_1 A$ ماتریسی است که از انجام r عمل مقدماتی روی A به‌دست می‌آید. پس B هم‌ارز سطری A است، یعنی A و B هم‌ارز سطری هستند.

(لزوم) فرض کنید A و B هم‌ارز سطری هستند. پس طبق تعریف ماتریس B را می‌توان به‌وسیله تعدادی عمل مقدماتی سطری (مثلاً r تا) از A به‌دست آورد. چون هر عمل مقدماتی را می‌توان به‌وسیله ضرب در یک ماتریس مقدماتی انجام داد نتیجه می‌گیریم که

$$B = E_r \cdots E_1 A \quad \blacksquare$$

قضیه ۲-۴-۵ هر ماتریس مقدماتی سطری وارون‌پذیر است و وارون آن یک ماتریس مقدماتی سطری از همان نوع است.