

$$2a_1 - 2a_2 + 2a_3 - a_4 = -1$$

$$-a_1 + 2a_2 + 2a_3 - a_4 = -1 \leftrightarrow Cx = d$$

$$3a_1 - 2a_2 + 7a_3 + 3a_4 = -9$$

$$2a_2 + 8a_3 - 7a_4 = 2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & -7 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}}_d$$

اعمالی که باعث تغییر مجدد و جوابها معادلات خط نفر شوند:
۱- جابجا کردن معادلات با یکدیگر

۲- ضرب طرفه یک معادله در یک ضریب غیر صفر

۳- طرفه یک معادله را در طرفه دیگر ضرب کرده و با معادله دیگری جمع کنیم

$$\begin{cases} e_1(ax) = d_1 \\ e_2(ax) = d_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_1(ax) = d_1 \\ e_2(ax) + \alpha e_1(ax) = d_2 + \alpha d_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1(ax) = d_1 \\ e_2(ax) + \alpha e_1(ax) - \alpha e_1(ax) = d_2 + \alpha d_1 - \alpha d_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_1(ax) = d_1 \\ e_2(ax) = d_2 \end{cases}$$

دل بر تو نم که راحت جان منی ورتا که دل از تو بر کشم بر که نم؟

$$e_2(ax) = d_2$$

اهداف آموزشی

اعمال سطری و ستونی مقدماتی

ماتریس دستگاه معادلات خطی

ماتریس‌های پلکانی و پلکانی کاهش یافته

روشهای گاوس و گاوس - جردن برای حل دستگاه معادلات خطی

هم‌ارزی سطری و ستونی ماتریس‌ها و ماتریس‌های مقدماتی

رابطه بین ماتریس‌های مقدماتی و اعمال سطری

محاسبه وارون یک ماتریس به کمک اعمال مقدماتی

۱-۲ ماتریس‌های پلکانی و اعمال مقدماتی سطری

تعریف ۱-۱-۲ یک ماتریس را به صورت پلکانی سطری می‌گوییم اگر

(i) سطرهای صفر ماتریس در صورت وجود همگی در پایین ماتریس باشند.

(ii) اولین درایه غیر صفر هر سطر (از سمت چپ) برابر ۱ باشد. این درایه را درایهٔ

پیشرو آن سطر نامیم.

(iii) درایهٔ پیشرو هر سطر سمت راست درایه پیشرو سطر قبل باشد.

مثال ۱-۱-۲ ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همگی پلکانی سطری‌اند در صورتی که ماتریس

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

پلکانی سطری نیست.

تعریف ۲-۱-۲ با توجه به اعمال مجاز روی معادلات یک دستگاه سه نوع عمل به نام اعمال مقدماتی سطری نوع I و II و III روی ماتریس‌ها به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

- عمل مقدماتی I: تعویض جای دو سطر.
- عمل مقدماتی II: ضرب یک سطر در عددی مخالف صفر.
- عمل مقدماتی III: افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر.

قضیه ۲-۱-۱ هر ماتریس را می‌توان به وسیله اعمال مقدماتی سطری به یک ماتریس پلکانی سطری تبدیل کرد.

اثبات:

(الف) اولین ستون (از سمت چپ) غیر صفر A را پیدا کرده، اولین درایه (از بالا) غیر صفر این ستون را مشخص می‌کنیم. فرض کنید این درایه در سطر i ام باشد.

(ب) جای سطر i ام و سطر یکم را عوض می‌کنیم.

(پ) همه درایه‌های این سطر را که اکنون سطر اول است بر اولین درایه غیر صفر آن تقسیم می‌کنیم (اولین درایه این سطر به ۱ تبدیل می‌شود که آن را درایه پیشرو این سطر می‌نامیم).

(ت) با افزودن مضارب مناسبی از سطر اول به سطرها بعدی درایه‌های زیر درایه پیشرو سطر اول را همگی به صفر تبدیل می‌کنیم.

(ث) سطر اول ماتریس را ندیده می‌گیریم، آنگاه ماتریسی حاصل می‌شود که یک سطر کمتر دارد و اعمال (الف) تا (ث) را در مورد ماتریس جدید تکرار می‌کنیم.

با تکرار اعمال (الف) تا (ث) ماتریس مورد نظر به یک ماتریس پلکانی سطری تبدیل خواهد شد.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۱-۲ فرض کنید می‌خواهیم ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

را به صورت پلکانی سطری درآوریم.

ستون ۱ اولین ستون غیر صفر و درایه دوم آن اولین درایه غیر صفر آن است. پس جای سطرهای اول و دوم را عوض می‌کنیم و ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

پس از تقسیم سطر اول ماتریس فوق را بر اولین درایه آن (یعنی ۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

درایه دوم ستون اول خود صفر است. پس از افزودن سطر اول به سطر سوم و افزودن ۲- برابر سطر اول به سطر چهارم درایه‌های دوم و سوم و چهارم ستون اول صفر شده و ماتریس به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

اکنون اعمال (الف) تا (ت) مذکور در قضیه ۲-۱-۱ را انجام داده‌ایم. حال سطر اول ماتریس را ندیده گرفته مجدداً اعمال (الف) تا (ت) را روی ماتریسی که از سه سطر آخر ماتریس فوق تشکیل می‌شود یعنی ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

انجام می‌دهیم.

چون لازم نیست سطرهای ماتریس فوق را جابجا کنیم، سطر اول را بر اولین درایه غیر صفر آن (یعنی ۲) تقسیم می‌کنیم.

ماتریس‌های پلکانی، هم ارزی ماتریس‌ها و ... ۲۵

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & & 1 & -3 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{array} \right] \end{array}$$

یک برابر سطر اول را به سطر دوم می‌افزاییم

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & & 1 & -3 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{array} \right] \end{array}$$

با حذف سطر اول، ماتریسی دارای فقط دو سطر به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{array} \right] \end{array}$$

درایه‌های سطر اول را بر اولین درایه غیر صفر آن (یعنی ۲) تقسیم می‌کنیم، داریم

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 5 \end{array} \right] \end{array}$$

با افزودن ۲ برابر سطر اول به سطر دوم داریم

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

اکنون ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به شکل ماتریس پلکانی سطری است. ■

توجه: برای جلوگیری از محاسبات کسری هنگام تعویض جای سطرها (عمل (ب)) بهتر است در صورت وجود، سطری را با سطر اول جابجا کنیم که اولین درایه غیرصفر آن ۱ باشد.

این بخش را با ذکر این نکته بدیهی پایان می‌دهیم که اگر یک ستون از ماتریس A صفر باشد، در اثر هیچ یک از اعمال مقدماتی سطری این ستون تغییر نمی‌کند و صفر باقی می‌ماند.

۲-۲ حل دستگاههای خطی به کمک ماتریس‌ها (روش گاوس)

دستگاه n معادله k مجهولی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. با توجه به قاعده ضرب ماتریس‌ها و تعریف تساوی دو ماتریس بدیهی است که دستگاه فوق را به صورت ماتریسی

$$Ax = b \quad (1-2-2)$$

نیز می‌توان نوشت که در آن $A = \{a_{ij}\}$ یک ماتریس $n \times k$ و

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

است. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

را می‌توان به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نوشت که به صورت (۱-۲-۲) است.

حال اگر A یک ماتریس مربع (مثلاً $k \times k$) و وارون‌پذیر باشد، طرفین رابطه (۱-۲-۲) را می‌توانیم از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم و داریم

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

یعنی مقادیر مجهول (جواب x_i ها) درایه‌های ماتریس ستونی $A^{-1}b$ است. متأسفانه A اغلب وارون‌پذیر یا حتی مربع نیست و درموردی که A وارون‌پذیر است محاسبه A^{-1} چنانچه که بعداً خواهیم دید وقت‌گیر می‌باشد.

به این دلیل روش فوق به ندرت برای حل دستگاه‌های معادلات خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این بخش و در بخش بعدی دو روش ساده‌تر برای حل و بحث دستگاه‌های خطی ارائه می‌کنیم.

چون بردار مجهول x فقط یک نماد است، آنچه درباره دستگاه باید بدانیم ماتریس ستونی b و ماتریس A است. این دو ماتریس را اگر پهلوی هم قرار دهیم ماتریس G را خواهیم داشت که نمایش آن به صورت افراز شده عبارت است از

$$G = [A \quad ; \quad b]$$

ماتریس G را ماتریس افزوده دستگاه (۱-۲-۲) می‌نامیم. بدیهی است که انجام اعمال مجاز سه‌گانه روی دستگاه (۱-۲-۲) معادل انجام اعمال مقدماتی سطری سه‌گانه روی ماتریس G است. فرض کنید با کمک اعمال مقدماتی سطری ماتریس G را به یک ماتریس پلکانی سطری

$$H = [C \quad ; \quad d]$$

تبدیل کنیم. که d ستون آخر H است در این صورت دستگاه (۲-۲-۱) معادل دستگاه

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1k}x_k = d_1 \\ \vdots \\ c_{n1}x_1 + \dots + c_{nk}x_k = d_n \end{cases} \quad (2-2-2)$$

خواهد بود. اما چون H یک ماتریس پلکانی سطری است، هر معادله از دستگاه لااقل یک مجهول از معادله قبلی کمتر دارد و لذا به سادگی می توان فهمید که آیا دستگاه جواب دارد یا نه و جواب را (در صورت وجود) می توان به راحتی به دست آورد. این روش حل دستگاههای خطی به روش گاوس (ریاضی دان مشهور آلمانی قرن ۱۸) معروف است.

مثال ۲-۲-۱ برای مثال ماتریس افزوده دستگاه مثال قبل عبارت است از

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \vdots & 9 \\ 3 & -2 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

که پس از تبدیل به پلکانی سطری به صورت

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

است.

دستگاه معادلات معادل با ماتریس افزوده H عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

که از معادله دوم ابتدا داریم $x_2 = 2$ و سپس با جایگذاری مقدار x_2 در معادله اول داریم

$$x_1 + 8 = 9$$

که نتیجه می شود $x_1 = 1$. ■

مثال ۲-۲-۲ فرض کنید A ماتریس مفروض در مثال ۲-۱-۲، ماتریس افزوده یک

دستگاه معادلات خطی باشد، دستگاه را حل کنید.

حل: داریم

$$G = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

پس دستگاه دارای ۴ معادله و چهار مجهول است. ماتریس پلکانی سطری حاصل از G عبارت است از

$$H = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

و دستگاه معادلات خطی حاصل از H عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{3}{2}x_4 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

توجه کنید که معادله آخر یک اتحاد $0=0$ است که حذف شده است.

ملاحظه می‌شود که دستگاه در واقع سه معادله و چهار مجهول دارد. حال چون

آخرین معادله دارای دو مجهول است مقدار یکی از آنها (مثلاً x_4) اختیاری است و مقدار

آن را برابر t اختیار می‌کنیم. از معادله آخر داریم.

$$x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_4 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t$$

حال از معادله ماقبل آخر داریم

$$x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4 = 6 + 6t$$

و از معادله اول داریم

$$x_1 = -3 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 8 + 8t$$

ملاحظه می‌شود که دستگاه به ازای هر مقدار t یک دسته جواب دارد. مثلاً اگر t

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 7 \\ 7x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$[A:b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-3} \\ \xrightarrow{+1} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x - 5 \\ x - 5 \\ x - 5 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ a_3 = 7 \\ 0a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \end{cases}$$

این رنگ، جواب ندارد.

را برابر ۴ قرار دهیم داریم $x_1 = 40$ و $x_2 = 30$ و $x_3 = -\frac{17}{4}$ و $x_4 = 4$. چون t هر عدد حقیقی می تواند باشد گوئیم که دستگاه دارای بی نهایت (دسته) جواب است. ■

تذکر: به طور کلی می توان گفت که

الف) اگر ماتریس H (ماتریس پلکانی سطری حاصل از ماتریس افزوده دستگاه) دارای سطری باشد که درایه پیشرو آن آخرین درایه آن است، دستگاه جواب ندارد (زیرا هر عددی در صفر ضرب شود حاصل برابر صفر خواهد بود). اگر چنین نباشد یعنی اگر ماتریس H دارای چنین سطری نباشد، دستگاه قطعاً جواب دارد.

ب) در صورتی که دستگاه جواب داشته باشد، آنگاه اگر همه ستونهای اولیه H (ستونهای غیر از ستون آخر H) دارای درایه پیشرو باشند دستگاه جواب یکتا دارد. (یعنی فقط یک دسته جواب برای مقادیر مجهول وجود دارد). در صورتی که یک یا چند ستون (مثلاً k ستون $k \geq 1$) از ستونهای اولیه H بدون درایه پیشرو باشند، مقادیر k مجهول اختیاری است و در نتیجه دستگاه دارای بی نهایت جواب می باشد. در مثال فوق $k = 1$ است.

مثال ۲-۲-۳ فرض کنید ماتریس پلکانی حاصل از ماتریس افزوده دستگاه یکی از ۴

ماتریس

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & : & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & : & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & : & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت: دستگاه مربوط به H_1 دارای یک دسته جواب یکتا است. دستگاههای مربوط به H_2 و H_3 دارای بی نهایت جواب هستند. در مورد H_4 داریم $k = 2$ و در مورد H_3 داریم $k = 1$. دستگاه مربوط به H_4 دارای جواب نیست.

ماتریس‌های پلکانی، هم ارزی ماتریس‌ها و ... ۳۱

دستگاه‌های مربوط به H_1 و H_3 و H_4 دارای چهار معادله و چهار مجهول هستند. در صورتی که دستگاه مربوط به H_2 دارای سه معادله و چهار مجهول است. ■

قضیه ۲-۲-۱ اگر A یک ماتریس $n \times k$ و $n < k$ باشد آنگاه $x = 0$ تنها جواب معادله ماتریسی $Ax = 0$ نیست.

اثبات: چون حاصلضرب هر ماتریس در یک ماتریس صفر برابر صفر است، بدیهی است که معادله $Ax = 0$ یک جواب $x = 0$ دارد. فرض کنید B ماتریسی باشد که از تبدیل A به ماتریس پلکانی سطری حاصل می‌شود. چون اعمال مقدماتی سطری بر روی ستونهای صفر بی تأثیراند، دو دستگاه $Ax = 0$ و $Bx = 0$ معادل‌اند. (زیرا ماتریس افزوده دستگاه دوم به وسیله اعمال مقدماتی سطری از ماتریس افزوده دستگاه اول به دست می‌آید). اما B یک ماتریس $n \times k$ به شکل پلکانی سطری است و $n < k$. پس طبق استدلال قسمت (ب) (بلافاصله قبل از مثال ۲-۲-۳) باید در دستگاه $Bx = 0$ مقادیر بعضی از مجهولات اختیاری باشد و دستگاه بینهایت جواب دارد و اثبات کامل است. ■

۲-۳ روش گاوس - جردن

برای حل دستگاه‌های خطی روش دیگری وجود دارد که در آن پس از تبدیل ماتریس افزوده به ماتریس پلکانی سطری ماتریس حاصل باز هم ساده‌تر می‌شود. به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۲-۳-۱ یک ماتریس پلکانی سطری کاهش یافته، یک ماتریس پلکانی سطری است که درایه‌های بالای هر درایه پیشرو نیز صفر باشند.

بدیهی است هنگامی که یک ماتریس به شکل پلکانی سطری باشد، با افزودن مضارب مناسبی از سطرهاى پایین‌تر به سطرهاى بالاتر می‌توان ماتریس را به شکل پلکانی سطری کاهش یافته درآورد.
پس قضیه زیر را می‌پذیریم.

قضیه ۲-۳-۱ هر ماتریس $n \times k$ مانند A را می‌توان به وسیله اعمال مقدماتی سطری به