

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1' \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{n^2} 1 (1' 1) 1' \\
 &= \frac{1}{n} 1 1' = M
 \end{aligned}$$

ماتریس

$$H = I_n - \frac{1}{n} J_n = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

نیز خود توان است زیرا

$$H^2 = (I - M)(I - M) = I - 2M + M^2 = I - M = H$$

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

■ نیز یک ماتریس خودتوان ولی نامتقارن است.

دو لم و نتیجه زیر به ما کمک می‌کنند که قضیه مهمی را در مورد ماتریسهای خودتوان ثابت کنیم.

لم ۸-۳-۱ اگر B_1 یک ماتریس $n \times n$ ($k \leq n$) و تمام رتبه باشد (یعنی $r(B_1) = k$)، آنگاه B_1 دارای یک وارون چپ است.

اثبات: اگر $k = n$ باشد B_1 وارون پذیر و حکم ثابت است. اگر $k < n$ باشد آنگاه ستونهای B_1 اعضای R^n و مستقل خطی هستند. طبق قضیه توسعه پایه (قضیه ۳-۵-۱)

نیم ۳-۸-۱ ص ۱۰۰

یک ماتریس $(n-k) \times n$ مانند B_2 وجود دارد طوری که ماتریس $B = [B_1 \quad B_2]$ دارای ستونهای مستقل خطی و در نتیجه وارون پذیر است. فرض کنید D وارون B باشد اگر D را به صورت $D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$ افراز کنیم می توانیم بنویسیم:

$$DB = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} [B_1 \quad B_2]$$

$$= \begin{bmatrix} D_1 B_1 & D_1 B_2 \\ \vdots & \vdots \\ D_2 B_1 & D_2 B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & O \\ \vdots & \vdots \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

پس $D_1 B_1 = I_k$ و حکم ثابت است. ■

نتیجه ۸-۳-۱ اگر C_1 یک ماتریس $n \times k$ ($k \leq n$) با سطرهای مستقل خطی باشد آنگاه C_1 دارای یک وارون راست است.

اثبات: فرض کنید $B_1 = C_1'$. طبق قضیه فوق ماتریسی مانند D_1 وجود دارد طوری که $D_1 B_1 = I$ پس $D_1 C_1' = I$ و حکم ثابت است. ■

لم ۸-۳-۲ هر ماتریس $n \times m$ مانند A با رتبه r را می توان به صورت $A = B_1 C_1$ نوشت که $B_1 \sim n \times r$ ، $C_1 \sim r \times m$ و B_1 و C_1 تمام رتبه اند.

اثبات: با توجه به قسمت لزوم اثبات قضیه ۸-۳-۵ می توان نوشت

$$r(A) = r = r(I_r)$$

اعمال لظری
مبدل

$$A \Rightarrow I_r \rightarrow A = B \begin{bmatrix} I_r & O \\ \vdots & \vdots \\ O & O \end{bmatrix} C$$

که B و C دو ماتریس نامنفرد هستند. اگر B و C را افراز کنیم داریم

$$[B_1 \mid 0]$$

$$A = [B_1 \mid B_2] \begin{bmatrix} I_r & \vdots & O \\ \dots & \vdots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_2 \end{bmatrix} = B_1 C_1$$

چون $B_1 \sim n \times r$ و $C_1 \sim r \times m$ و B_1 و C_1 تمام رتبه هستند، حکم ثابت است. ■

قضیه ۸-۳-۱ اگر A یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه $r(A) = \text{tr} A$.
اثبات: اگر A یک ماتریس $n \times n$ با رتبه r باشد طبق لم ۸-۳-۲ می توان نوشت

$$A = B_1 C_1$$

که B_1 و C_1 به ترتیب $n \times r$ و $r \times n$ و هر دو تمام رتبه اند. طبق لم ۸-۳-۱ و نتیجه آن B_1 دارای یک وارون چپ مانند L و C_1 دارای یک وارون راست مانند R است. چون A طبق فرض خودتوان است می توان نوشت

$$A^2 = A$$

$$\Rightarrow B_1 C_1 B_1 C_1 = B_1 C_1$$

$$\Rightarrow L B_1 C_1 B_1 C_1 R = L B_1 C_1 R$$

پس

$$C_1 B_1 = I_r$$

حال داریم

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B_1 C_1)$$

$$= \text{tr}(C_1 B_1) = \text{tr}(I_r) = r \quad \blacksquare$$

طبق قضیه زیر مقادیر ویژه یک ماتریس خود توان نه تنها حقیقی هستند بلکه مقادیر خاصی دارند.

قضیه ۸-۳-۲ هر یک از مقادیر ویژه یک ماتریس خودتوان صفر یا ۱ است.
اثبات: فرض کنید (λ, x) یک زوج ویژه ماتریس خودتوان A باشد. می توان نوشت

$$\lambda x = Ax = A^T x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

پس

$$(\lambda - \lambda^2)x = 0$$

چون x طبق تعریف بردار ویژه مخالف 0 است داریم $\lambda - \lambda^2 = 0$ و در نتیجه $\lambda = 0$ یا

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = (t+1)(t-1) + 1 = t^2 - 1 + 1 = t^2 \quad \blacksquare \quad \lambda = 1$$

تذکر: عکس قضیه فوق صادق نیست، یعنی اگر مقادیر ویژه یک ماتریس فقط یک

و صفر باشند آن ماتریس لزوماً خودتوان نیست. ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$ که تنها مقدار ویژه

آن صفر با دو تکرار است این ادعا را ثابت می‌کند. اما اگر ماتریس قطری شدنی باشد وضع فرق می‌کند. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۸-۳-۱ اگر A یک ماتریس قطری شدنی با مقادیر ویژه صفر و یک باشد، آنگاه A خودتوان است.

اثبات: چون A قطری شدنی است ماتریس نامنفرد P وجود دارد طوری که

$$A = PDP^{-1}$$

که در آن D یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن صفر و یک است و در نتیجه $D^2 = D$. حال می‌توان نوشت

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = A \quad \blacksquare$$

برای اثبات قضیه زیر به منبع [۲] رجوع کنید.

قضیه ۸-۳-۴ فرض کنید A یک ماتریس مربع و

$$A = A_1 + \dots + A_k$$

در این صورت هر دو فرض از چهار فرض

$$1) A_i^T = A_i, \quad i = 1, \dots, k$$

$$II) A_i A_j = O \quad i \neq j$$

$$III) A^2 = A$$

$$IV) r(A) = r(A_1) + \dots + r(A_k)$$

دو فرض دیگر را نتیجه می دهد.

نتیجه ۲-۳-۸ اگر B یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه B خودتوان است اگر و تنها اگر

$$r(B) + r(I - B) = n$$

اثبات: در قضیه فوق k را برابر ۲ و A را برابر I می گیریم، آنگاه معادل بودن (III, I) با (IV, III) نتیجه را اثبات می کند. ■

نتیجه ۳-۳-۸ اگر $A_1 + \dots + A_k = I$ و $A_i^2 = A_i, i = 1, \dots, k$ ، آنگاه، $A_i A_j = O$.

اثبات: مستقیماً از قضیه ۴-۳-۸ نتیجه می شود. ■

۴-۸ صورتهای درجه دوم

تعریف ۱-۴-۸ یک صورت درجه دوم برحسب بردار x تابعی به شکل

$$Q(x) = x' A x$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1-4-8)$$

است که در آن A یک ماتریس متقارن $n \times n$ است.

بدیهی است که $Q(0) = 0$. صورت درجه دوم $Q(x)$ در رابطه (۱-۴-۸) را مثبت

معین (نامنفی معین) می نامیم اگر به ازای هر $x \neq 0, Q(x) > 0, Q(x) \geq 0$ باشد.

ماتریس متقارن A در رابطه (۱-۴-۸) را مثبت معین (نامنفی معین) می نامیم و با

نماد $A > 0$ (یا $A \geq 0$) نشان می دهیم هرگاه $Q(x)$ در رابطه (۱-۴-۸) مثبت معین (نامنفی

معین) باشد.

$$x' C' A C x = (C x)' A (C x) = y' A y \quad \blacksquare$$

از قضیه فوق دو نتیجه زیر فوراً حاصل می شود.

$$C' C \geq 0 \quad \text{و} \quad C C' \geq 0$$

نتیجه ۸-۴-۲ به ازای هر ماتریس $n \times k$ مانند C ماتریسهای $C' C$ ، $C C'$ نامنفی معین هستند.

$$A = I \rightarrow C' I C = C' C \geq 0 \rightarrow C C' \geq 0$$

قضیه ۸-۴-۳ هر ماتریس مثبت معین مانند A را به صورت $A = C C'$ می توان نوشت،

که یک ماتریس نامنفرد است. $\rightarrow$ هر دو معکوس برابری دارند $\rightarrow$ اثبات: تمرین $\blacksquare$

$$A = P D P' = (P \sqrt{D}) (\sqrt{D} P') = C C' : C = P \sqrt{D} \rightarrow (\sqrt{D})' = \sqrt{D}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \sqrt{D} \sqrt{D}, \sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_i} & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \rightarrow (\sqrt{D})' = \sqrt{D}$$

۵-۸ وارون تعمیم یافته

همان طور که می دانیم برای اینکه یک ماتریس وارون داشته باشد باید مربع و نامنفرد باشد. در این بخش تعریف وارون را طوری تعمیم می دهیم که در مورد همه ماتریسها اعم از مربع یا غیرمربع منفرد یا نامنفرد دارای کاربرد بوده و با تعریف معمولی وارون نیز سازگار باشد.

تعریف ۸-۵-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ باشد. اگر B ماتریسی $k \times n$ باشد که در رابطه

$$A B A = A$$

صدق می کند، B را وارون تعمیم یافته A می نامیم و با A^- نشان می دهیم. بدیهی است که اگر A مربع و وارون پذیر باشد $A^- = A^{-1}$.

مثال ۸-۵-۱ ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ وارون تعمیم یافته ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ است، زیرا

$$A B A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$ACA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

۲۴۲ جبر خطی برای آمار

همچنین می توان تحقیق کرد که ماتریس $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نیز وارون تعمیم یافته A است.

پس وارون تعمیم یافته ممکن است یکتا نباشد. ■

قضیه ۸-۵-۱ اگر A یک ماتریس $n \times k$ ، b یک ماتریس ستونی و معادله $Ax = b$ سازگار (دارای جواب) باشد آنگاه یک جواب معادله عبارتست از

$$x = A^{-}b$$

اثبات: می توان نوشت

$$Ax = b \Rightarrow AA^{-}Ax = b$$

اگر دستگاه $Ax = b$ سازگار باشد می توان به جای Ax معادل آن یعنی b را قرار داد. پس

$$\underbrace{AA^{-}}_X b = b$$

داریم

اما رابطه فوق به این معنی است که $A^{-}b$ یک جواب معادله $Ax = b$ است. ■

ثابت خواهیم کرد که وارون تعمیم یافته یک ماتریس همواره وجود دارد، ولی ابتدا به نتایج زیر نیاز داریم.

تعریف ۸-۵-۲ یک ماتریس $n \times r$ ($r \leq n$) مانند W را متعامد ستونی می نامیم اگر $WW' = I_r$ و یک ماتریس $r \times n$ ($r \leq n$) مانند W را متعامد سطری می نامیم اگر $WW' = I_r$.

قضیه ۸-۵-۲ اگر A یک ماتریس $n \times n$ متقارن باشد می توان نوشت

$$A = P_1 D_1 P_1'$$

$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه غیر صفر A و P_1 یک ماتریس متعامد ستونی $n \times r$ است و $r = r(A)$.