

فصل ۸

مطالب تکمیلی

مقدمه

در این فصل مطالبی از جبرخطی را مورد بررسی قرار خواهیم داد که در آمار و احتمال، به خصوص آنالیز چند متغیری، رگرسیون، مدل‌های خطی و فرآیندهای تصادفی کاربرد بیشتری دارد. در این فصل ترتیب خاصی برای بخشها، در نظر گرفته نشده ولی سعی شده است هر بخش مربوط به یک موضوع باشد.

اهداف آموزشی

ماتریسهای احتمال

ضرب کرونیکر دو ماتریس دلخواه و تفاوت‌های این ضرب با ضرب معمولی ماتریسها
ماتریسهای خود توان و شرایط خود توان بودن ماتریسها
صورت‌های درجه دوم، ماتریسهای مثبت معین و نامنفی معین
وارون تعمیم یافته یک ماتریس و نحوه محاسبه آن

۸-۱ ماتریسهای احتمال

در نظریهٔ زنجیرهای مارکف ماتریس‌هایی به کار می‌روند که در تعریف زیر صدق می‌کنند.

تعریف ۸-۱-۱ یک ماتریس مربع را ماتریس احتمال می‌نامیم اگر همهٔ درایه‌های آن نامنفی و جمع درایه‌های هر سطر آن برابر واحد باشد.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i=1, \dots, n$$

۲۳۰ جبر خطی برای آمار

مثال ۸-۱-۱ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس احتمال است چون مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر ۱ است.

قضیه ۸-۱-۱ یک ماتریس مربع A یک ماتریس احتمال است اگر و تنها اگر $\forall i, j, a_{ij} \geq 0$ و

$$A \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. می‌توان نوشت

$$A \mathbf{1} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{n1} \end{bmatrix} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & 1 \\ \vdots & 1 \\ a'_{n1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \Leftrightarrow A \text{ یک ماتریس احتمال است} \quad \blacksquare$$

قضیه ۸-۱-۲ حاصلضرب دو ماتریس احتمال یک ماتریس احتمال است.

اثبات: فرض کنید A و B دو ماتریس احتمال هستند. با توجه به اینکه می‌توان نوشت

$$AB \mathbf{1} = A \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

قضیه ثابت است. $\blacksquare$

۸-۲ ضرب کرونیگر

تعریف ۸-۲-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ و B یک ماتریس $m \times r$ باشد. در این صورت حاصلضرب کرونیگر A و B با نماد $A \otimes B$ عبارت از یک ماتریس $nm \times kr$ است که به صورت زیر افراز شده است.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1k}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2k}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nk}B \end{bmatrix}$$

مثال ۸-۲-۱

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & af & ag & be & bf & bg \\ ce & cf & cg & de & df & dg \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

تعریف ۸-۲-۲ شکل برداری ماتریس X که آن را با X^ν نشان می‌دهیم عبارت است از یک ماتریس ستونی که از زیر هم قرار دادن ستونهای X حاصل می‌شود، یعنی اگر X یک ماتریس $n \times k$ باشد، آنگاه

$$X^\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} \end{bmatrix}$$

مثال ۸-۲-۲

$$X^\nu = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\nu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

قضیه ۸-۲-۱ ضرب کرونیگر دارای ویژگیهای زیر است.

$$1 - c(A \otimes B) = (cA) \otimes B = A \otimes (cB) \quad , \quad c \in R$$

$$2 - A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$۳ - (A \otimes B)' = A' \otimes B'$$

$$۴ - (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad \text{اگر ضربهای } AC \text{ و } BD \text{ امکان پذیر باشد.}$$

$$۵ - (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad \text{اگر } A \text{ و } B \text{ وارون پذیر باشند.}$$

$$۶ - (A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

$$۷ - C \otimes (A+B) = C \otimes A + C \otimes B$$

$$۸ - (AXB)^v = (B' \otimes A)X^v$$

اثبات: فقط اثبات ویژگیهای (۴) و (۸) را ارائه می کنیم. اثبات بقیه قسمتها ساده و به عنوان تمرین به عهده خواننده است. فرض کنید $A \sim n \times k$, $X \sim k \times m$, $B \sim m \times r$ و $C \sim k \times r$ باشد.

اثبات (۴): می توان نوشت.

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1k}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nk}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1r}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{k1}D & \cdots & c_{kr}D \end{bmatrix}$$

اگر ضرب دو ماتریس فوق را بخواهیم به صورت افراز شده فوق انجام دهیم (این کار امکان پذیر است چون طبق فرض حاصل ضرب AC موجود است)، جمله عمومی حاصل ضرب عبارت است از

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^K a_{it} B c_{tj} D &= \left[\sum_{t=1}^k a_{it} c_{tj} \right] B D \\ &= e_{ij} B D \end{aligned}$$

که e_{ij} جمله عمومی ماتریس $E = AC$ است. پس

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = E \otimes (BD)$$

$$= (AC) \otimes (BD).$$

اثبات (۸): می نویسیم

$$\begin{aligned}(AXB)^V &= \{ [A [x_{(1)} \cdots x_{(m)}] B] \}^V \\ &= \left\{ [Ax_{(1)} \cdots Ax_{(m)}] \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix} \right\}^V \\ &\stackrel{\text{فرض اول فصل ۱۵}}{=} \left\{ \left[\sum_{t=1}^m Ax_{(1)} b_{t1} \cdots \sum_{t=1}^m Ax_{(1)} b_{tr} \right] \right\}^V\end{aligned}$$

از طرفی می توان نوشت

$$\begin{aligned}(B' \otimes A)X^V &= \begin{bmatrix} b_{11}A & \cdots & b_{m1}A \\ b_{1r}A & \cdots & b_{mr}A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(m)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^m b_{t1}Ax_{(t)} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^m b_{tr}Ax_{(t)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

پس حکم ثابت است. ■

۳-۸ ماتریسهای خودتوان

تعریف ۱-۳-۸ ماتریس مربع A را خودتوان می نامیم اگر $A^2 = A$.
بدیهی است ماتریس I و ماتریس O هر دو خودتوان هستند.

مثال ۱-۳-۸ ماتریس

$$M = \frac{1}{n} J_n = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

خودتوان است زیرا

$$(A \otimes B)' = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1k}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2k}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nk}B \end{bmatrix}' \quad (1')$$

$$A' \otimes B' = \begin{bmatrix} a_{11}B' & a_{12}B' & \dots & a_{1k}B' \\ a_{21}B' & a_{22}B' & \dots & a_{2k}B' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B' & a_{n2}B' & \dots & a_{nk}B' \end{bmatrix} \rightarrow \text{مطابق است ✓}$$

$$(\bar{A}' \otimes \bar{B}') (A \otimes B) = (\bar{A}' A \otimes \bar{B}' B) = I \otimes I = \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & I_{m \times m} \end{bmatrix} = I_{n' \times n'} \rightarrow (A \otimes B)' = \bar{A}' \otimes \bar{B}'$$

$$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$$

$$(A+B) \otimes C = [(a_{ij} + b_{ij})C] = [a_{ij}C + b_{ij}C] = [a_{ij}C] + [b_{ij}C] = A \otimes C + B \otimes C$$

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1 & 1' \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{n^2} 1 (1' 1) 1' \\
 &= \frac{1}{n} 1 1' = M
 \end{aligned}$$

ماتریس

$$H = I_n - \frac{1}{n} J_n = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

نیز خود توان است زیرا

$$H^2 = (I - M)(I - M) = I - 2M + M^2 = I - M = H$$

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

■ نیز یک ماتریس خودتوان ولی نامتقارن است.

دو لم و نتیجه زیر به ما کمک می‌کنند که قضیه مهمی را در مورد ماتریسهای خودتوان ثابت کنیم.

لم ۸-۳-۱ اگر B_1 یک ماتریس $n \times k$ ($k \leq n$) و تمام رتبه باشد (یعنی $r(B_1) = k$)، آنگاه B_1 دارای یک وارون چپ است.

اثبات: اگر $k = n$ باشد B_1 وارون‌پذیر و حکم ثابت است. اگر $k < n$ باشد آنگاه ستونهای B_1 اعضای R^n و مستقل خطی هستند. طبق قضیه توسعه پایه (قضیه ۳-۵-۱)