

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (i=0, \dots, n)$$

$$\text{if } f(\lambda) = 0 \rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\rightarrow a_n (\lambda)^n + a_{n-1} (\lambda)^{n-1} + \dots + a_1 (\lambda) + a_0 = 0 \quad \text{جبر خطی برای آمار}$$

برابر $-trA$ است، یعنی $trA = -c_1$. از طرفی از جبر دبیرستان می دانیم که مجموع

ریشه های معادله $f(t) = 0$ برابر قرینه ضرب $n-1$ یعنی برابر $-c_1$ است. پس

مجموع ریشه های معادله مشخصه (با احتساب تکرار) $trA =$

و اثبات کامل است. ■

تذکر: توجه کنید که در صورت قضیه فوق حقیقی بودن مقادیر ویژه فرض نشده

است. با توجه به اینکه در یک معادله درجه n تعداد ریشه های مختلط (در صورت

وجود) زوج است و هر دو ریشه مختلط مزدوج یکدیگر هستند حقیقی بودن دترمینان و

اثر یک ماتریس مربع با مختلط بودن بعضی از مقادیر ویژه آن تناقض ندارد.

نتیجه ۷-۱-۱ ماتریس مربع A وارون پذیر است اگر و تنها اگر هیچ یک از مقادیر ویژه آن

$$\text{صفر نباشد.} \quad \lambda=0 \rightarrow |A-\lambda I|=0 \leftrightarrow |A| \neq 0 \leftrightarrow A \text{ وارون پذیر}$$

اثبات: با توجه به قضیه فوق و رابطه وارون پذیری A با مقدار دترمینان A ، واضح است. ■

۲-۷ قطری کردن ماتریسها

تعریف ۷-۲-۱ ماتریس مربع A را قطری شدنی می گوئیم اگر ماتریس نامنفردی مانند

P و یک ماتریس قطری با درایه های حقیقی مانند D وجود داشته باشد طوری که

$$A = PDP^{-1}$$

قطری کردن یک ماتریس یعنی یافتن ماتریسهای P و D که در رابطه فوق صدق کنند، در

جبر خطی کاربردی از اهمیت زیادی برخوردار است. در این بخش شرایطی را که تحت

آنها یک ماتریس مربع قطری شدنی است بررسی می کنیم.

قضیه ۷-۲-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، در این صورت A قطری شدنی

است اگر و تنها اگر A دارای n بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه حقیقی

باشد.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهای ویژه A به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و مجموعه $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مستقل خطی باشد. ماتریسهای P و D را به صورت

$$P = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

تعریف می‌کنیم. چون X مستقل خطی است P وارون‌پذیر (نامنفرد) است. ثابت می‌کنیم که $A = PDP^{-1}$. برای این کار کافی است ثابت کنیم

$$AP = PD$$

اما داریم

$$\begin{aligned} AP &= A[\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] \\ &= [A\alpha_1 \quad \cdots \quad A\alpha_n] \\ &= [\lambda_1\alpha_1 \quad \cdots \quad \lambda_n\alpha_n] \\ &= [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned}$$

(لزوم) فرض کنید ماتریس نامنفرد P و ماتریس قطری D وجود داشته باشند طوری که

$$A = PDP^{-1}$$

در این صورت می‌توان نوشت $AP = PD$ یا

$$A[\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

که $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ستونهای P و $d_1, \dots, d_n$ درایه‌های قطر اصلی D هستند، رابطه فوق را با ضرب ماتریسهای هر طرف به صورت افراز شده به صورت

$$[A\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] = [d_1\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad d_n\mathbf{p}_n]$$

می‌توان نوشت، که از آن نتیجه می‌شود

$$Ap_i = d_i p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

یعنی $p_1, \dots, p_n$ بردارهای ویژه A به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه $d_1, \dots, d_n$ هستند. چون P نامنفرد فرض شده است، مجموعه $\{p_1, \dots, p_n\}$ مستقل خطی است و اثبات کامل می‌باشد. ■

مثال ۷-۲-۱ بردارهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۲ همگی (متناظر با $\lambda = 1$) مضارب بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هستند. بنابراین این ماتریس نمی‌تواند دارای دو بردار ویژه مستقل خطی باشد، پس قطری‌شدنی نیست.

ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ از همان مثال نیز قطری‌شدنی نیست، زیرا اصلاً مقدار ویژه حقیقی

ندارد. ■ $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 3c_1 \end{cases} \rightarrow c_1 + 3c_1 = 0 \rightarrow 4c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow c_2 = 0$ لذا $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ مستقل خطی نیست.

مثال ۷-۲-۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۱ یک بردار ویژه $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ متناظر

با مقدار ویژه $\lambda_1 = -1$ و یک بردار ویژه $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = 3$ دارد.

چون α_1 و α_2 مستقل خطی هستند (تحقیق کنید)، ماتریس A قطری‌شدنی است و اگر

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

باشد داریم $A = PDP^{-1}$. ■

ملاحظه می‌شود که قضیه ۷-۲-۱ نه تنها شرط لازم و کافی برای قطری‌شدنی بودن

یک ماتریس ارائه می‌دهد بلکه طریقه ساختن ماتریسهای P و D را نیز بیان می‌کند.

مثال ۷-۲-۳ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۳ یک بردار ویژه $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 0$ و دو بردار ویژه $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ -c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow c_3 = 0$$

مستقل خطی

۲۰۷ مقادیر و بردارهای ویژه

ویژه $\lambda_2 = 1$ دارد. چون مجموعه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ مستقل خطی است (تحقیق کنید)، ماتریس A قطری شدنی است و به علاوه اگر

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشد داریم $A = PDP^{-1}$. ■

تذکر: توجه کنید که ماتریسهای P و D مذکور در قضیه ۷-۲-۱ یکتا نیستند. مثلاً اگر در دو مثال فوق ترتیب مقادیر ویژه را روی قطر اصلی D و به طور متناظر ترتیب بردارهای ویژه را به عنوان ستونهای P عوض کنیم، همانطور که از نحوه اثبات قضیه مشهود است، باز هم دو ماتریس P و D در رابطه $A = PDP^{-1}$ صدق می کنند. قضیه زیر یک شرط کافی که به سادگی قابل تحقیق است برای اینکه یک ماتریس $n \times n$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد ارائه می کند.

قضیه ۷-۲-۲ فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس مربع A و $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ به ترتیب بردارهای ویژه A متناظر با $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ باشند، آنگاه مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ مستقل خطی است.

اثبات: قضیه را با استفاده از استقراء ریاضی اثبات می کنیم. فرض کنید مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ مستقل خطی است، ثابت می کنیم، مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}\}$ نیز مستقل خطی است، فرض کنید.

$$c_1 \alpha_1 + \dots + c_r \alpha_r + c_{r+1} \alpha_{r+1} = 0 \quad (1-2-7)$$

که در آن $c_1, \dots, c_{r+1}$ ضرایب حقیقی هستند. طرفین رابطه فوق را از سمت چپ در A ضرب می کنیم تا رابطه

$$c_1 A \alpha_1 + \dots + c_r A \alpha_r + c_{r+1} A \alpha_{r+1} = 0$$

حاصل شود. با توجه به اینکه $A \alpha_i = \lambda_i \alpha_i$, $i = 1, \dots, r+1$ از رابطه فوق رابطه زیر را نتیجه می گیریم

$$c_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + c_r \lambda_r \alpha_r + c_{r+1} \lambda_{r+1} \alpha_{r+1} = 0$$

حال طرفین رابطه (۷-۲-۱) را در λ_{r+1} ضرب کرده، از طرفین رابطه فوق کم می‌کنیم تا رابطه

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\alpha_1 + \dots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\alpha_r = 0$$

حاصل شود. از اینکه بنابر فرض استقراء مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ مستقل خطی است و از اینکه λ ها طبق فرض متمایز هستند نتیجه می‌گیریم که

$$c_1 = \dots = c_r = 0$$

پس از رابطه (۷-۲-۱) نتیجه می‌شود $c_{r+1}\alpha_{r+1} = 0$. چون α_{r+1} طبق تعریف بردار ویژه مخالف صفر است نتیجه می‌گیریم که c_{r+1} نیز برابر صفر است. با توجه به اینکه هر مجموعه حاوی یک بردار غیر صفر مستقل خطی است، اثبات استقرایی کامل می‌باشد. ■

از قضیه فوق نتیجه زیر بدیهی است.

نتیجه ۷-۲-۱ یک شرط کافی برای این که یک ماتریس $n \times n$ قطری‌شدنی باشد این است که دارای تعداد n مقدار ویژه متمایز باشد.

روبرو

مثال ۷-۲-۴ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

دارای معادله مشخصه

$$(t-1)(t+3)(t-2) = 0$$

است و در نتیجه دارای سه مقدار ویژه متمایز $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 2$ پس بدون اینکه نیازی به یافتن بردارهای ویژه A باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که A قطری‌شدنی است. ■

تذکر: باید توجه داشت که داشتن n مقدار ویژه متمایز فقط یک شرط کافی برای

قطری‌شدنی بودن یک ماتریس $n \times n$ است و ممکن است یک ماتریس $n \times n$ بدون

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ -2 & -3-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ -2 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)(-3-t) = 0$$

$\lambda_3 = 2$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_1 = -3$ ←

اینکه دارای n مقدار ویژه متمایز باشد قابل قطری شدن باشد. مثلاً ماتریس مثال ۷-۱-۳ که یک ماتریس 3×3 است فقط دو مقدار ویژه متمایز دارد در حالی که در مثال ۷-۲-۳ دیدیم که این ماتریس قطری شدنی است.

اگر ماتریس A مربع $n \times n$ باشد می توان آن را در خودش ضرب کرد. اگر A را k بار در خودش ضرب کنیم حاصل ضرب را با نماد بدیهی A^k نشان می دهیم. در صورتی که k عدد طبیعی بزرگی باشد این کار بسیار وقت گیر است. اما اگر A قطری شدنی باشد، می توان A را به صورت

$$A = PDP^{-1}$$

نوشت که در آن D یک ماتریس قطری است، داریم

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\ &= PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

محاسبه D^k بسیار ساده است. در واقع

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{bmatrix} \rightarrow D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{bmatrix}$$

که $d_1, \dots, d_n$ درایه های روی قطر اصلی D هستند. بنابراین با قطری کردن A محاسبه A^k بسیار ساده تر است.

تعریف ۷-۲-۲ فرض کنید A و B دو ماتریس مربع هم بعد باشند، ماتریس B را مشابه ماتریس A می نامیم اگر ماتریسی نامنفرد مانند P وجود داشته باشد طوری که

$$B = PAP^{-1}$$

بدیهی است که هر ماتریس مشابه خودش است. همچنین اگر در رابطه فوق قرار دهیم $Q = P^{-1}$ داریم $B = QAQ^{-1}$. ضمناً از اینکه حاصل ضرب دو ماتریس نامنفرد یک ماتریس نامنفرد است (چرا؟) نتیجه می گیریم که اگر A با B و B با C مشابه باشد، آنگاه A با C مشابه است. پس تشابه ماتریسها دارای سه ویژگی انعکاس، تقارن و تعدی است. با توجه به تعریف تشابه دو ماتریس می توانیم قطری شدنی بودن یک ماتریس را

به صورت زیر تعریف کنیم:

$$B = PAP^{-1}, C = QBQ^{-1} \rightarrow C = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1}$$

«ماتریس مربع A را قطری‌شدنی می‌نامیم اگر A مشابه یک ماتریس قطری باشد.»

قضیه زیر مناسب بودن استفاده از کلمه «مشابه» را در تعریف ۷-۲-۲ تأیید می‌کند.

قضیه ۷-۲-۳ ماتریسهای مشابه مقادیر ویژه یکسان دارند.
اثبات: فرض کنید A و B مشابه هستند، در این صورت می‌توان نوشت

$$B = PAP^{-1}$$

$$|B - tI| = |PAP^{-1} - tPIP^{-1}| \quad \text{در نتیجه}$$

$$= |P(A - tI)P^{-1}|$$

$$= |P| |A - tI| |P^{-1}| \quad \text{اما داریم}$$

$$|P| \times |P^{-1}| = |PP^{-1}| = |I| = 1$$

پس داریم

$$|B - tI| = |A - tI|$$

یعنی A و B دارای یک معادله مشخصه مشترک هستند و در نتیجه مقادیر ویژه یکسان دارند. ■

۷-۳ قطری کردن ماتریسهای متقارن

مقادیر و بردارهای ویژه ماتریسهای متقارن دارای ویژگیهای خاصی هستند که باعث می‌شود هر ماتریس متقارن قطری‌شدنی باشد. قضیه زیر که حقیقی بودن مقادیر ویژه ماتریسهای متقارن را بیان می‌کند، تنها قضیه‌ای است که در اثبات آن با اعداد مختلط سروکار داریم.

قضیه ۷-۳-۱ اگر A یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه همه مقادیر ویژه A حقیقی هستند.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \rightarrow A\alpha = \alpha_1 a_{(1)} + \dots + \alpha_n a_{(n)} \\ A\beta = \beta_1 a_{(1)} + \dots + \beta_n a_{(n)}$$

$$\alpha \cdot AB = \sum_{i=1}^n B_i \alpha \cdot a_{(i)} = \sum_{i=1}^n (B_i \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{(i,j)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_i \alpha_j a_{(i,j)}$$

اثبات: فرض کنید $\lambda = a + ib$ یک مقدار ویژه A ، $v = \alpha + i\beta$ یک بردار ویژه A متناظر با λ

$$B \cdot A\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i B \cdot a_{(i)} = \sum_i (\alpha_i \sum_j B_j a_{(i,j)}) = \sum_j B_j \sum_i \alpha_i a_{(i,j)} = \sum_j B_j \alpha_j \sum_i a_{(i,j)} = \sum_j B_j \alpha_j \lambda$$

یا

$$A(\alpha + i\beta) = (a + ib)(\alpha + i\beta)$$

$$A\alpha + iA\beta = (a\alpha - b\beta) + i(b\alpha + a\beta)$$

بامساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی دوطرف تساوی فوق دوتساوی ماتریسی

$$\begin{cases} A\alpha = a\alpha - b\beta \\ A\beta = b\alpha + a\beta \end{cases}$$

حاصل می شود. اگر طرفین رابطه اول را در β و طرفین رابطه دوم را در α ضرب داخلی (متعارف) کنیم، با استفاده از نماد $x'y$ برای ضرب داخلی متعارف اعضای R^n (تذکر بعد از تعریف ۴-۱-۱ را ببینید) داریم:

$$\begin{cases} \beta' A\alpha = a\beta' \alpha - b\beta' \beta \\ \alpha' A\beta = b\alpha' \alpha + a\alpha' \beta \end{cases} \quad B \cdot A\alpha = \alpha \cdot AB$$

با توجه به اینکه $\beta' A\alpha = \alpha' A\beta$ (چرا؟)، داریم

$$a\beta' \alpha - b\beta' \beta = b\alpha' \alpha + a\alpha' \beta$$

$$\alpha' \alpha \leftarrow \beta' \alpha = d \beta' \beta \quad \text{که با توجه به تساوی } \beta' \alpha = d \beta' \beta \text{ می توان نوشت}$$

$$b(\alpha' \alpha + \beta' \beta) = 0 \quad \beta \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta$$

چون طبق تعریف بردار ویژه، $v \neq 0$ است، لااقل یکی از دو بردار α و β باید مخالف صفر باشد. بنابراین از رابطه فوق نتیجه می گیریم که $b = 0$ و اثبات کامل است. ■

قضیه زیر یک ویژگی مهم بردارهای ویژه ماتریسهای متقارن را بیان می کند.

قضیه ۷-۳-۲ بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن متناظر با مقادیر ویژه متمایز (تحت ضرب داخلی متعارف) ^۱ برهم عموداند.

۱. در این فصل همه جا حاصل ضرب داخلی متعارف بر R^n و R_m مورد نظر است، لذا از تأکید مجدد آن خودداری خواهیم کرد.

اثبات: فرض کنید $(\lambda_1, \alpha_1), (\lambda_2, \alpha_2)$ دو زوج ویژه ماتریس متقارن A باشند. اگر طرفین تساوی

$$\lambda_2 \alpha_2 = A \alpha_2$$

را در α_1 ضرب داخلی کنیم (با استفاده از نماد قضیه قبل برای ضرب داخلی) داریم

$$\begin{aligned} \lambda_2 \alpha_1' \alpha_2 &= \alpha_1' (A \alpha_2) \\ &= (A \alpha_1)' \alpha_2 \quad \text{با توجه به متقارن بودن } A \\ &= (\lambda_1 \alpha_1)' \alpha_2 \\ &= \lambda_1 \alpha_1' \alpha_2 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \alpha_1' \alpha_2 = 0$$

چون طبق فرض $\lambda_1 \neq \lambda_2$ نتیجه می‌گیریم که $\alpha_1' \alpha_2 = 0$ و اثبات کامل است. ■
گرچه همه مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن حقیقی هستند ولی چون ممکن است بعضی از مقادیر ویژه متمایز نباشند (ریشه‌های تکراری معادله مشخصه باشند) برای اثبات اینکه هر ماتریس متقارن قطری‌شدنی است به قضیه زیر، که آن را بدون اثبات می‌پذیریم، [برای اثبات این قضیه می‌توان به منبع [۳] مراجعه کرد] نیاز داریم.

قضیه ۷-۳-۳ اگر λ یک ریشه معادله مشخصه ماتریس متقارن A با k تکرار باشد، آنگاه بعد فضای ویژه λ برابر k است.

تذکر: ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۲، که در آن $\lambda = 1$ یک مقدار ویژه با تعداد تکرار ۲ است ولی فضای ویژه آن یک بعدی می‌باشد، نشان می‌دهد که نمی‌توان شرط تقارن را در قضیه فوق حذف کرد.

قضیه ۷-۳-۴ هر ماتریس متقارن قطری‌شدنی است.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n \times n$ است. با توجه به قضیه ۷-۲-۱ کافی است ثابت کنیم A دارای n بردار ویژه مستقل است. فرض کنید مقادیر ویژه A عبارتند از $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ به ترتیب با تعداد تکرار $r_1, \dots, r_k$. بنابر قضیه قبل به ازای هر $i = 1, \dots, k$ بعد

$$\underbrace{C_{11} \alpha_{11} + \dots + C_{1r_1} \alpha_{1r_1} + \dots + C_{k1} \alpha_{k1} + \dots + C_{kr_k} \alpha_{kr_k}}_{w_k} = 0 \quad \text{مقایسه استقلال فضایی}$$

$w_1, \dots, w_k$ و w_k هر کدام یک بردار در $\mathbb{R}^n$ متناظر با یک مقدار ویژه λ_i (ممکن است از یکدیگر متفاوت باشند).

فضای ویژه λ_i برابر r_i است. پس فرض کنید $T_1, \dots, T_k$ به گونه‌ای که $w_1 = 0, \dots, w_n = 0$ و $\alpha_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ متناظر فضایی $T_1 = \{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1r_1}\}, \dots, T_k = \{\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kr_k}\}$ ۲-۳-۷

به ترتیب پایه‌هایی برای فضاهای ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ باشند. چون بنابر قضیه ۲-۳-۷ بردارهای ویژه ماتریسهای متقارن متناظر با مقادیر ویژه متمایز بر هم عمودند و در نتیجه مستقل خطی هستند (قضیه ۲-۲-۴). نتیجه می‌گیریم که مجموعه

$$T = T_1 \cup \dots \cup T_k$$

که حاوی $r_1 + \dots + r_k$ بردار ویژه A است، مستقل خطی می‌باشد. از طرفی می‌دانیم که هر معادله درجه n ، منجمله معادله مشخصه A ، دقیقاً دارای n ریشه (اعم از حقیقی و مختلط و با احتساب تکرار) دارد. چون مقادیر ویژه A همگی حقیقی هستند، نتیجه می‌گیریم که $r_1 + \dots + r_k = n$ و اثبات کامل است. ■

اگر از پایه‌های $T_1, \dots, T_k$ ، مذکور در قضیه فوق، پایه‌های متعامد یکه

$$S_1 = \{\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1r_1}\}, \dots, S_k = \{\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kr_k}\}$$

را به وسیله فرآیند گرام - اشمیت بسازیم، مجموعه

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_k$$

یک مجموعه متعامد یکه حاوی n بردار خواهد بود که همگی بردارهای ویژه A هستند

(چرا؟). اگر این n بردار را با $p_1, \dots, p_n$ نشان دهیم و ماتریس P را به صورت

$$P = [p_1 \quad \dots \quad p_n]$$

$$P'P = \begin{bmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{bmatrix} [p_1 \quad \dots \quad p_n]$$

تعریف کنیم، داریم

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p'_1 p_1 & \cdots & p'_1 p_n \\ \vdots & & \vdots \\ p'_n p_1 & \cdots & p'_n p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = I$$

و در نتیجه $P^{-1} = P'$. بنابراین با استفاده از قضیه ۷-۲-۱ می توان نوشت

$$A = PDP'$$

که D یک ماتریس قطری است. پس قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه ۷-۳-۵ (تجزیه جُردن) اگر A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد، ماتریسی قطری مانند D و یک ماتریس P با ویژگی $P^{-1} = P'$ وجود دارد طوری که $A = PDP'$.
با توجه به قضیه ۷-۲-۱ درایه های قطر اصلی D مقادیر ویژه A هستند.
ماتریسی که دارای ویژگی ماتریس P در قضیه فوق باشد دارای نام خاصی است که در تعریف زیر آمده است.

تعریف ۷-۳-۱ ماتریس مربع P را یک ماتریس متعامد می نامیم اگر $P^{-1} = P'$. اگر P ، $n \times n$ باشد تبدیل خطی $L: R^n \rightarrow R^n$ به صورت $L(x) = Px$ ، $\forall x \in R^n$ را یک تبدیل خطی متعامد می نامیم.

وجه تسمیه ماتریس متعامد مسلماً در این است که ستونهای (و همچنین سطرها) این ماتریس، بردارهای متعامد یکه هستند. این ویژگی و سایر ویژگیهای ماتریسهای متعامد در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۷-۳-۶ اگر P یک ماتریس متعامد $n \times n$ باشد آنگاه

(الف) ستونهای (و همچنین سطرها) P متعامد یکه اند.

(ب) هر یک از مقادیر ویژه P $+1$ یا -1 است.

(پ) دترمینان P برابر $+1$ یا -1 است.

(ت) حاصلضرب داخلی اعضای R^n تحت تبدیل متعامد متناظر با P بدون تغییر

باقی می ماند.

اثبات: (الف) با توجه به روابط $P'P = I$ و $PP' = I$ ساده است.

$$P'P = \begin{bmatrix} \alpha'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha'_n \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\alpha'_1 \alpha_1 = 1, \alpha'_1 \alpha_2 = 0, \dots, \alpha'_n \alpha_1 = 0, \dots, \alpha'_n \alpha_n = 1$

(ب) فرض کنید (λ, α) یک زوج ویژه P باشد. پس داریم

$$P\alpha = \lambda\alpha$$

از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم

$$(P\alpha)'(P\alpha) = (\lambda\alpha)'(\lambda\alpha)$$

یا

$$\alpha'P'P\alpha = \lambda^2\alpha'\alpha$$

که ما را به رابطه

$$(\lambda^2 - 1)\alpha'\alpha = 0$$

می‌رساند. چون $\alpha \neq 0$ نتیجه می‌گیریم $\lambda^2 = 1$ یا $\lambda = \pm 1$.

(پ) از قسمت (ب) و قضیه ۷-۱-۴ نتیجه می‌شود.

(ت) فرض کنید $u = Px$ و $v = Py$ ، $x, y \in R^n$. حاصلضرب داخلی u و v برابر

است با

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u'v \\ &= (Px)'(Py) \\ &= x'P'Py \\ &= x'y = x \cdot y \quad \blacksquare \end{aligned}$$

به عنوان تمرین این واقعیت را به سادگی می‌توان ثابت کرد که عکس قسمت (ت) از قضیه فوق نیز صحیح است. یعنی هر ماتریس مربع که عملگر متناظرش بر R^n حاصلضرب داخلی را حفظ کند، یک ماتریس متعامد $n \times n$ است. بنابراین می‌توان گفت که عملگرهای خطی متعامد و فقط عملگرهای خطی متعامد بر R^n حاصلضرب داخلی بردارها را حفظ می‌کند.

می‌دانیم که طول یک بردار و زاویه بین دو بردار براساس حاصلضرب داخلی بردارها تعریف می‌شوند، یعنی اگر $x, y \in R^n$ ، آنگاه داریم

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}, \quad |y| = \sqrt{y \cdot y}, \quad \cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}$$

بنابراین یک تبدیل متعامد طول بردارها، همچنین زاویه بین آنها را حفظ می‌کند. یعنی اگر x و y دو بردار از R^n و P یک ماتریس متعامد $n \times n$ و $u = Px$ و $v = Py$ باشد، آنگاه

$$|u| = |x|, \quad |v| = |y|$$

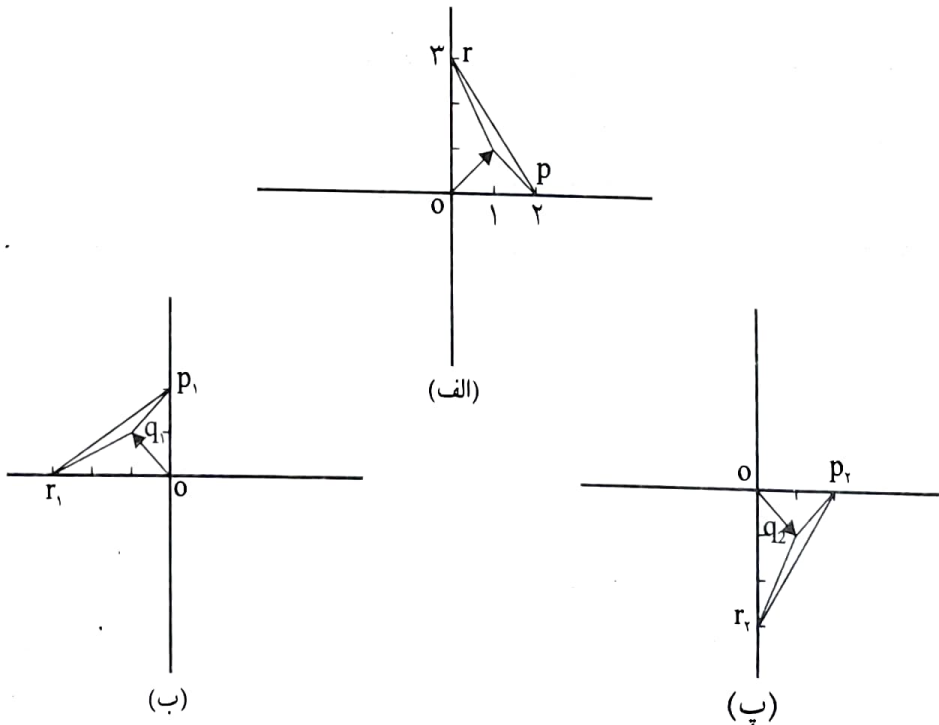
زاویه بین x و y = زاویه بین u و v

از نظر هندسی یک عملگر خطی متعامد بر R^n ، بردارهای R^n را یا به اندازه زاویه ثابتی حول زیرفضایی از R^n دوران می‌دهد یا اینکه هر بردار R^n را بر انعکاس آن نسبت به یک زیر فضای ثابت R^n می‌نگارد. (برای توضیح بیشتر و نحوه تشخیص این دو نوع عملگر منبع [۳] را ببینید).

برای مثال سه قسمت شکل ۷-۳-۱ سه بردار p و q و r را در R^2 ، و نگاره‌های

آنها را تحت دو عملگر خطی متعامد متناظر با ماتریسهای متعامد $P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ و $P_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ نشان می‌دهد (تحقیق کنید). ملاحظه می‌شود که در هر دو

قسمت (ب) و (پ) علاوه بر اینکه طول بردارها برابر طولهای آنها قبل از تبدیل است، هر سه بردار زوایایی با هم می‌سازند که قبل از تبدیل با هم داشتند.



شکل ۷-۳-۱

ولی می بینیم که در قسمت (ب) هر سه بردار به اندازه 90° در جهت دایره مثلثاتی دوران یافته اند در حالی که در قسمت (پ) سه بردار به یک اندازه دوران نیافته اند بلکه می توان گفت بردارها نسبت به محور افقی انعکاس یافته اند. با وجود این مثلثی که از سه انتهای سه بردار تشکیل می شود در هر سه شکل مساوی است. مسلماً مثلث شکل (پ) را برخلاف مثلث شکل (ب) نمی توان با دوران بر مثلث اولیه در شکل (الف) منطبق کرد. برای اینکه این انطباق امکان پذیر باشد باید ابتدا آن را از صفحه بریده و (به کمک بعد سوم) آن را برگردانیم.

اینکه عملگرهای خطی متعامد (چه از نوع دورانی و چه از نوع انعکاسی) اشکال و زوایا را حفظ می کنند یک واقعیت کلی است و از ثابت ماندن حاصلضرب داخلی نتیجه می شود. در بحث زیر از این واقعیت استفاده خواهیم کرد. می دانیم که در یک دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی معادله

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = d^2$$

معادله یک بیضی به مرکز مبدأ مختصات و اقطار منطبق بر محورهای افقی و قائم به ترتیب با طولهای $2ad$ و $2bd$ است. معادله فوق را به صورت

$$\mathbf{x}' C \mathbf{x} = d^2 \quad (1-3-7)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = d^2$$

که در آن $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$ است، نیز می توان نوشت. حال نشان می دهیم که معادله

$$\mathbf{x}' A \mathbf{x} = d^2 \quad (2-3-7)$$

که در آن A یک ماتریس متقارن 2×2 با مقادیر ویژه مثبت است، نیز معادله یک بیضی است. برای این کار کافی است یک تبدیل متعامد بیابیم که تحت آن معادله $(2-3-7)$ به شکل معادله $(1-3-7)$ درآید یعنی به صورت $\mathbf{u}' D \mathbf{u} = d^2$ که در آن D قطری است درآید.

چون A متقارن است می توان A را به صورت $A = PDP'$ نوشت که

$$u' P u = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [u_1 \lambda_1 \ u_2 \lambda_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1^2 \lambda_1 + u_2^2 \lambda_2 = d^2$$

جبر خطی برای آمار

$$\rightarrow \frac{u_1^2}{\frac{d^2}{\lambda_1}} + \frac{u_2^2}{\frac{d^2}{\lambda_2}} = 1 \rightarrow u_1 = 0 \rightarrow u_2 = \pm \frac{d}{\sqrt{\lambda_2}}$$

$$P = [\gamma_1 \ \vdots \ \gamma_2] \ , \ D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad u_2 = 0 \rightarrow u_1 = \pm \frac{d}{\sqrt{\lambda_1}}$$

و λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه A و γ_1 و γ_2 بردارهای ویژه یک A به ترتیب متناظر λ_1 و λ_2 است.
 حال تبدیل متعامد $u = P'x$ را در نظر بگیرید. اگر در معادله $(2-3-7)$ به جای x بردار u را قرار دهیم داریم

$$(Pu)' A (Pu) = d^2$$

یا

$$u' P' A P u = d^2$$

که معادل است با

$$u' D u = d^2$$

معادله فوق معادله یک بیضی به مرکز مبدأ مختصات و اقطار منطبق بر محورهای افقی و قائم به ترتیب با طولهای $\frac{2d}{\sqrt{\lambda_1}}$ ، $\frac{2d}{\sqrt{\lambda_2}}$ است. پس با توجه به اینکه تبدیلات متعامد اشکال را حفظ می کنند نتیجه می گیریم که معادله $x'Ax = d^2$ نیز معادله یک بیضی به مرکز مبدأ مختصات و اقطار با طولهای $\frac{2d}{\sqrt{\lambda_1}}$ ، $\frac{2d}{\sqrt{\lambda_2}}$ است. البته اقطار این بیضی بر محورهای مختصات منطبق نیست. اقطار این بیضی به ترتیب بر بردارهای γ_1 و γ_2 (بردارهای ویژه متعامد یک A) منطبق است زیرا داریم

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\gamma_1 \ \gamma_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_1$$

$$P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\gamma_1 \ \gamma_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma_2$$

از بحث فوق نتیجه می گیریم که معادله

$$ax^2 + bx^2 + cx_1 x_2 = d^2$$

معادله یک بیضی به مبدأ مرکز مختصات است اگر ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix}$$

دارای