

6 Mar 2013

۲۳ ربیع الثانی ۱۴۳۴

$$\begin{cases} a+rc=1 \\ b+rd=0 \\ ra+c=0 \\ rb+d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+rc=1 \\ ra+c=0 \\ b+rd=0 \\ rb+d=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+rc=1 \\ ra+c=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} -\Delta a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{\Delta}$$

$$-\frac{1}{\Delta} + rc = 1 \rightarrow rc = 1 + \frac{1}{\Delta} = \frac{\Delta+1}{\Delta}$$

$$\begin{cases} b+rd=0 \\ rb+d=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} -\Delta b = -2 \rightarrow b = \frac{2}{\Delta}$$

$$\frac{2}{\Delta} + rd = 0 \rightarrow d = -\frac{1}{\Delta}$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta} & \frac{2}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = I \rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}$$

موقع جواب (در صورتی که $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$)

$$x = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$y = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

از نو کلی و گر چنان ساختی

$$\begin{cases} a_{11}z + a_{12}T = 0 \\ a_{12}z + a_{11}T = 1 \end{cases} \rightarrow (a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11})z = -a_{11}$$

$$z = -\frac{a_{11}}{a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}}$$

$$\frac{-a_{11}a_{12}}{a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}} + a_{12}T = 0 \rightarrow T = \frac{a_{11}}{a_{12}a_{12} - a_{12}a_{11}}$$

$$\rightarrow \bar{A} = \frac{1}{a_{12}a_{12} - a_{12}a_{11}} \begin{bmatrix} a_{12} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

جمع دو دایره نایز همگراست و دایره نایز با هم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

محل

$$1x1 - 0x0 = 1$$

$$1x1 - 0x0 = -1$$

$$2x0 - 0x0 = 0$$

دایره نایز است

دایره نایز است

جمع دایره نایز است

جمع دو دایره نایز همگراست و دایره نایز با هم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1x0 - 0x0 = 0$$

$$0x1 - 0x0 = 0$$

$$1x1 - 0x0 = 1$$

دایره نایز است

دایره نایز است

می در کف وزلف و لبری گیر کرد

دایره نایز است

قضیه ۱-۳-۲ اگر A وارون پذیر باشد آنگاه

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

اثبات: بنابر تعریف داریم $AA^{-1} = I$ چون $I = I'$ داریم $(AA^{-1})' = I$. با استفاده از

قضیه ۱-۲-۲ نتیجه می گیریم که

$$(A^{-1})' \cdot A' = I$$

یعنی $(A^{-1})'$ وارون چپ A' است. همچنین بنابر تعریف $A^{-1}A = I$ و با استدلال مشابه فوق داریم

$$A'(A^{-1})' = I$$

یعنی $(A^{-1})'$ وارون راست A' است. پس $(A^{-1})'$ وارون A' است و اثبات کامل می باشد. ■

نتیجه ۱-۳-۱ A وارون پذیر است اگر و فقط اگر A' وارون پذیر باشد.

قضیه ۱-۳-۳ اگر A و B هم بعد و وارون پذیر باشند داریم

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اثبات: داریم

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

پس $B^{-1}A^{-1}$ وارون راست AB است. از طرفی

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

پس $B^{-1}A^{-1}$ وارون چپ AB و اثبات کامل است. ■

نتیجه ۱-۳-۲ اگر $A = B_1 B_2 \dots B_k$ و ماتریس های $B_1, \dots, B_k$ وارون پذیر باشد، آنگاه A وارون پذیر است و

$$A^{-1} = B_k^{-1} \dots B_1^{-1}$$

*. بعداً در بخش ۵-۲ ثابت خواهیم که اگر A مربع و B وارون چپ A باشد. آنگاه B وارون A است.

اثبات: اگر طرفین رابطه مفروض را از سمت راست به ترتیب در $B_1^{-1} \dots B_k^{-1}$ ضرب کنیم، نتیجه حاصل می‌شود. ■

۴-۱ افراز ماتریس‌ها و عملیات جبری روی ماتریس‌های افراز شده
هرگاه به وسیله یک یا چند خط افقی و یا یک یا چند خط قائم یک ماتریس را به ماتریس‌های کوچکتری تقسیم کنیم، گوییم ماتریس را افراز کرده‌ایم. ماتریس‌های جدید حاصل را زیر ماتریس‌های ماتریس اولیه می‌نامیم. برای مثال ماتریس

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

به چهار زیر ماتریس

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [1 \ 2], \quad A_{22} = [4 \ 2 \ 5]$$

افراز شده است. می‌نویسم

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

در صورتی که دو ماتریس به یک شکل افراز شده باشند و زیر ماتریس‌های نظیر هم بعد باشند، دو ماتریس افراز شده را می‌توان به همان صورت افراز شده به وسیله جمع زیر ماتریس‌های نظیر هم جمع کرد. یعنی اگر

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

و به ازای هر i و j ، A_{ij} و B_{ij} هم بعد باشند، آنگاه

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{bmatrix}$$

یعنی $A+B$ یک ماتریس افراز شده است که تعداد زیر ماتریس‌های آن با تعداد زیر ماتریس‌های A (و B) برابر است.

ماتریس‌های A و B را به صورت افراز شده ضرب نیز می‌توان کرد. این در صورتی است که

اولاً تعداد افرازهای قائم ماتریس سمت چپ (یعنی A) با تعداد افرازهای افقی ماتریس سمت راست (یعنی B) برابر باشد و

ثانیاً به ازای هر i و j ماتریس A_{it} در ماتریس B_{tj} به صورت $A_{it}B_{tj}$ قابل ضرب باشد. در این صورت ضرب AB به صورت افراز شده طوری انجام می‌شود که انگار زیر ماتریس‌ها درایه‌های ماتریس‌ها باشند. یعنی مثلاً اگر

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

و $D = AB$ ، آن‌گاه

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \end{bmatrix}$$

که

$$D_{ij} = \sum_{t=1}^3 A_{it} B_{tj}, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3$$

که در آن مثلاً

$$D_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}$$

حالت‌های خاصی از افراز ماتریس‌ها **افراز سطری** و **افراز ستونی** یک ماتریس است. افراز

سطری ماتریس $n \times k$ به صورت

$$A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

و افراز ستونی آن به صورت

$$A = [a_{(1)} \dots a_{(k)}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Labels: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}$ (top row of A); $A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}$ (second row of A); $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{35}$ (third row of A); $A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, A_{45}$ (bottom row of A).
Labels: $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}$ (top row of B); $B_{21}, B_{22}, B_{23}, B_{24}, B_{25}$ (second row of B); $B_{31}, B_{32}, B_{33}, B_{34}, B_{35}$ (third row of B); $B_{41}, B_{42}, B_{43}, B_{44}, B_{45}$ (bottom row of B).

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 2 + 2 \times (-2) & 0 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 2 \times 0 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 + 3 \times (-2) & 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [0 \times 1 + 1 \times (-1)] + [(-1) \times 2 + 2 \times (-2)] & [0 \times (-1) + 1 \times 0] + [(-1) \times 1 + 2 \times 0] \\ [1 \times 1 + 1 \times (-1)] + [0 \times 2 + 3 \times (-2)] & [1 \times (-1) + 1 \times 0] + [0 \times 1 + 3 \times 0] \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

تقدی زخار زید خوشتر باشد

پرکن قحج باده و برودتیم

9 Mar 2013

۲۶ ربیع الثانی ۱۴۳۴

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a'_{(1)} \\ a'_{(2)} \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \end{matrix}$$

$$a_{(1)} b'_{(1)} + a_{(2)} b'_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 0 \times 1 & 0 \times 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 0 \\ (-1) \times (-1) & -1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 0 \times 1 + (-1) \times (-1) & 0 \times 1 + (-1) \times 0 \end{bmatrix} = AB$$

$$\rightarrow AB = a_{(1)} b'_{(1)} + a_{(2)} b'_{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} a'_{(1)} b_{(1)} & a'_{(1)} b_{(2)} \\ a'_{(2)} b_{(1)} & a'_{(2)} b_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [0 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & [0 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 0 \times 1 + (-1) \times (-1) & 0 \times 1 + (-1) \times 0 \end{bmatrix} = AB$$

$$\rightarrow AB = \begin{bmatrix} a'_{(1)} b_{(1)} & a'_{(1)} b_{(2)} \\ a'_{(2)} b_{(1)} & a'_{(2)} b_{(2)} \end{bmatrix}$$

می‌باید و مشتوق و به کام آسون

کس غیب چه داند که چه خواهد بود

نوشته می‌شود. در اینجا a'_i ها سطرهای A و $a_{(j)}$ ها ستونهای A هستند.
دقت کنید که نماد سطرها دارای «پریم» است و اندیس نماد ستونها داخل پرانتز
می‌باشد. در صورتی که $B \sim k \times m$ و $A \sim n \times k$ ، حاصلضرب AB را به صورت

$$AB = [a_{(1)} \cdots a_{(k)}] \begin{bmatrix} b'_{(1)} \\ \vdots \\ b'_{(k)} \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^k a_{(t)} b'_t$$

می‌توان نوشت. توجه داشته باشید که به ازای هر t ، $a_{(t)} b'_t$ یک ماتریس $n \times m$ است.
و بنابراین این ماتریس‌ها قابل جمع بوده و جمع آنها یک ماتریس $n \times m$ است
(همان‌طور که باید باشد). همچنین حاصلضرب AB را به صورت

$$AB = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} [b_{(1)} \cdots b_{(m)}] = \begin{bmatrix} a'_1 b_{(1)} & \cdots & a'_1 b_{(m)} \\ a'_n b_{(1)} & \cdots & a'_n b_{(m)} \end{bmatrix}$$

می‌توان نوشت. توجه داشته باشید که به ازای هر i و j حاصلضرب $a'_i b_{(j)}$ یک ماتریس
 1×1 (یک در یک) است و در نتیجه ماتریس سمت راست یک ماتریس $n \times m$ است
(همان‌طور که باید باشد).

ضمناً حاصلضرب AB را به صورت‌های افراز شده.

$$AB = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a'_1 B \\ \vdots \\ a'_n B \end{bmatrix}$$

و

$$AB = [b_{(1)} \cdots b_{(m)}] = [Ab_{(1)} \cdots Ab_{(m)}]$$

نیز می‌توان نوشت. اما نمی‌توان نوشت

$$AB = [a_{(1)} \cdots a_{(k)}] B = [a_{(1)} B \cdots a_{(k)} B]$$

$$AB = A \begin{bmatrix} \mathbf{b}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}'_1 \\ \vdots \\ A\mathbf{b}'_k \end{bmatrix}$$

زیرا ضرب $B a_{(j)}$ یا $A b'_i$ امکان‌پذیر نیست.

دو لِم زیر که با استفاده از ضرب ماتریس‌های افراز شده به سادگی اثبات می‌شوند، بسیار مفید هستند.

لِم ستونی فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ و x یک ماتریس ستونی با بعد k (یعنی دارای k درایه) است، آن‌گاه

$$Ax = x_1 a_{(1)} + \dots + x_k a_{(k)}$$

که x_j ها برای $j = 1, \dots, k$ درایه‌های x و $a_{(j)}$ ها برای $j = 1, \dots, k$ ، ستونهای A هستند.

اثبات:

$$Ax = [a_{(1)}, \dots, a_{(k)}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = a_{(1)}[x_1] + \dots + x_k a_{(k)}[x_k] = x_1 a_{(1)} + \dots + x_k a_{(k)}$$

توجه کنید که ضرب $a_{(j)} x_i$ با توجه به اینکه $[x_j]$ ها ماتریس‌های یک در یک هستند، امکان‌پذیر است و داریم

$$\blacksquare \quad j = 1, \dots, k \quad a_{(j)}[x_i] = x_i a_{(j)}$$

لِم سطری فرض کنید A یک ماتریس $n \times k$ و x' یک ماتریس سطری با بعد n است. آن‌گاه

$$x'A = x_1 a'_1 + \dots + x_n a'_n$$

که x_i ها درایه‌های x' و a'_i ها سطرهای A هستند.

اثبات: مشابه لِم ستونی (تمرین). $\blacksquare$

قضیه ۱-۴-۱ فرض کنید ضرب دو ماتریس A و B به صورت AB ممکن باشد، آن‌گاه اگر یک ستون B (یک سطر A) صفر باشد، لااقل یک ستون (یک سطر) ماتریس AB نیز صفر است.

اثبات: فرض کنید B یک ماتریس $k \times m$ بوده و ستون زام آن صفر باشد می توان نوشت

$$\begin{aligned} AB &= A[b_{(1)}, \dots, o, \dots, b_{(m)}] \\ &= [Ab_{(1)}, \dots, o, \dots, Ab_{(m)}] \end{aligned}$$

که در آن o یک ماتریس ستونی با درایه‌های صفر است. پس یک ستون AB صفر بوده و اثبات کامل است.

اثبات: حالت سطری مشابه است (تمرین). ■

خودآزمایی

۱-۱ اگر ماتریس A هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی باشد، آنگاه A چگونه ماتریسی است؟

۲-۱ آیا اگر $b_{(j)}$ ستون زام ماتریس B باشد، ستون زام ماتریس AB برابر $Ab_{(j)}$ است؟

۳-۱ آیا اگر $AB = I$ ، آنگاه لزوماً $BA = I$ ؟

۴-۱ آیا اگر A نامنفرد باشد، آنگاه لزوماً AB نیز نامنفرد است؟

۵-۱ آیا ماتریس AA' همواره متقارن است؟

۶-۱ آیا اگر A پاد متقارن باشد، آنگاه لزوماً A منفرد است؟

۷-۱ آیا همه درایه‌های ماتریس A لزوماً نامنفی هستند؟

۸-۱ آیا اگر A پاد متقارن باشد، درایه‌های روی قطر اصلی A با هم برابرند؟

۹-۱ آیا اگر A و B منفرد باشند، آنگاه لزوماً $A + B$ منفرد است؟

۱۰-۱ آیا بازای هر ماتریس مربع A ، ماتریس $A + A'$ متقارن است؟

۱۱-۱ آیا اثر یک ماتریس مربع، حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی آن است؟

آیا برای هر دو ماتریس مربع A و B و به ازای هر دو عدد a و b

$$(aA + bB)' = aA' + bB' \quad 12-1$$

$$tr(aA + bB) = atrA + btrB \quad 13-1$$

۱۴-۱ آیا $(A - A')$ برای هر ماتریس مربع A ، پاد متقارن است؟

۱۵-۱ آیا ماتریس‌های قطری ماتریس‌های متقارن هستند؟