

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (i=0, \dots, n)$$

$$\text{یعنی } f(\lambda) = 0 \rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\rightarrow a_n (\bar{\lambda})^n + a_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + a_1 (\bar{\lambda}) + a_0 = 0 \quad \text{جبر خطی برای آمار}$$

برابر $\text{tr} A = -c_1$ است، یعنی $c_1 = -\text{tr} A$. از طرفی از جبر دیرستان می دانیم که مجموع

ریشه های معادله $f(t) = 0$ برابر قرینه ضریب t^{n-1} یعنی برابر $-c_1$ است. پس

مجموع ریشه های معادله مشخصه (با احتساب تکرار) $\text{tr} A =$

و اثبات کامل است. ■

تذکر: توجه کنید که در صورت قضیه فوق حقیقی بودن مقادیر ویژه فرض نشده

است. با توجه به اینکه در یک معادله درجه n تعداد ریشه های مختلط (در صورت

وجود) زوج است و هر دو ریشه مختلط مزدوج یکدیگر هستند حقیقی بودن دترمینان و

اثر یک ماتریس مربع با مختلط بودن بعضی از مقادیر ویژه آن تناقض ندارد.

نتیجه ۷-۱-۱ ماتریس مربع A وارون پذیر است اگر و تنها اگر هیچ یک از مقادیر ویژه آن

$$\text{صفر نباشد.} \quad \text{نشان} \quad \begin{aligned} & A \text{ وارون} \leftrightarrow |A| \neq 0 \leftrightarrow |A - tI| = 0 \text{ نیست} \end{aligned}$$

اثبات: با توجه به قضیه فوق و رابطه وارون پذیری A با مقدار دترمینان A ، واضح است. ■

۲-۷ قطری کردن ماتریسها

تعریف ۷-۲-۱ ماتریس مربع A را قطری شدنی می گویم اگر ماتریس نامنفردی مانند

P و یک ماتریس قطری با درایه های حقیقی مانند D وجود داشته باشد طوری که

$$A = P D P^{-1}$$

قطری کردن یک ماتریس یعنی یافتن ماتریسهای P و D که در رابطه فوق صدق کنند، در

جبر خطی کاربردی از اهمیت زیادی برخوردار است. در این بخش شرایطی را که تحت

آنها یک ماتریس مربع قطری شدنی است بررسی می کنیم.

قضیه ۷-۲-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، در این صورت A قطری شدنی

است اگر و تنها اگر A دارای n بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه حقیقی

باشد.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهای ویژه A به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و مجموعه $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مستقل خطی باشد. ماتریسهای P و D را به صورت

$$P = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

تعریف می‌کنیم. چون X مستقل خطی است P وارون‌پذیر (نامنفرد) است. ثابت می‌کنیم که $A = PDP^{-1}$. برای این کار کافی است ثابت کنیم

$$AP = PD$$

اما داریم

$$\begin{aligned} AP &= A[\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] \\ &= [A\alpha_1 \quad \dots \quad A\alpha_n] \\ &= [\lambda_1 \alpha_1 \quad \dots \quad \lambda_n \alpha_n] \\ &= [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned}$$

(لزوم) فرض کنید ماتریس نامنفرد P و ماتریس قطری D وجود داشته باشند طوری که

$$A = PDP^{-1}$$

در این صورت می‌توان نوشت $AP = PD$ یا

$$A[p_1 \quad \dots \quad p_n] = [p_1 \quad \dots \quad p_n] \begin{bmatrix} d_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n \end{bmatrix}$$

که $p_1, \dots, p_n$ ستونهای P و $d_1, \dots, d_n$ درایه‌های قطر اصلی D هستند، رابطه فوق را با ضرب ماتریسهای هر طرف به صورت افراز شده به صورت

$$[Ap_1 \quad \dots \quad Ap_n] = [d_1 p_1 \quad \dots \quad d_n p_n]$$

می‌توان نوشت، که از آن نتیجه می‌شود

$$Ap_i = d_i p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

یعنی $p_1, \dots, p_n$ بردارهای ویژه A به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه $d_1, \dots, d_n$ هستند. چون P نامنفرد فرض شده است، مجموعه $\{p_1, \dots, p_n\}$ مستقل خطی است و اثبات کامل می‌باشد. ■

مثال ۷-۲-۱ بردارهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۲ همگی (متناظر با $\lambda = 1$) مضارب بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هستند. بنابراین این ماتریس نمی‌تواند دارای دو بردار ویژه مستقل خطی باشد، پس قطری‌شدنی نیست.

ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ از همان مثال نیز قطری‌شدنی نیست، زیرا اصلاً مقدار ویژه حقیقی

ندارد. ■

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 3c_1 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow c_2 = 0$$
 لذا $\{ \alpha_1, \alpha_2 \}$ مستقل خطی است.

مثال ۷-۲-۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۱ یک بردار ویژه $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = -1$ و یک بردار ویژه $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = 3$ دارد. چون α_1 و α_2 مستقل خطی هستند (تحقیق کنید)، ماتریس A قطری‌شدنی است و اگر

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

باشد داریم $A = PDP^{-1}$. ■

ملاحظه می‌شود که قضیه ۷-۲-۱ نه تنها شرط لازم و کافی برای قطری‌شدنی بودن یک ماتریس ارائه می‌دهد بلکه طریقه ساختن ماتریسهای P و D را نیز بیان می‌کند.

مثال ۷-۲-۳ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ از مثال ۷-۱-۳ یک بردار ویژه $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 0$ و دو بردار ویژه $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ -c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow c_3 = 0$$

مقادیر و بردارهای ویژه ۲۰۷

مستقل خطی $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

ویژه $\lambda_2 = 1$ دارد. چون مجموعه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ مستقل خطی است (تحقیق کنید)، ماتریس A قطری شدنی است و به علاوه اگر

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشد داریم $A = PDP^{-1}$.

تذکر: توجه کنید که ماتریسهای P و D مذکور در قضیه ۷-۲-۱ یکتا نیستند. مثلاً اگر در دو مثال فوق ترتیب مقادیر ویژه را روی قطر اصلی D و به طور متناظر ترتیب بردارهای ویژه را به عنوان ستونهای P عوض کنیم، همانطور که از نحوه اثبات قضیه مشهود است، باز هم دو ماتریس P و D در رابطه $A = PDP^{-1}$ صدق می کنند. قضیه زیر یک شرط کافی که به سادگی قابل تحقیق است برای اینکه یک ماتریس $n \times n$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد ارائه می کند.

قضیه ۷-۲-۲ فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس مربع A و $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ به ترتیب بردارهای ویژه A متناظر با $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ باشند، آنگاه مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ مستقل خطی است.

اثبات: قضیه را با استفاده از استقراء ریاضی اثبات می کنیم. فرض کنید مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ مستقل خطی است، ثابت می کنیم، مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}\}$ نیز مستقل خطی است، فرض کنید.

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_r\alpha_r + c_{r+1}\alpha_{r+1} = 0 \quad (1-2-7)$$

که در آن $c_1, \dots, c_{r+1}$ ضرایب حقیقی هستند. طرفین رابطه فوق را از سمت چپ در A ضرب می کنیم تا رابطه

$$c_1A\alpha_1 + \dots + c_rA\alpha_r + c_{r+1}A\alpha_{r+1} = 0$$

حاصل شود. با توجه به اینکه $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$, $i = 1, \dots, r+1$ ، از رابطه فوق رابطه زیر را نتیجه می گیریم

$$c_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + c_r\lambda_r\alpha_r + c_{r+1}\lambda_{r+1}\alpha_{r+1} = 0$$

حال طرفین رابطه (۷-۲-۱) را در λ_{r+1} ضرب کرده، از طرفین رابطه فوق کم می‌کنیم تا رابطه

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\alpha_1 + \dots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\alpha_r = 0$$

حاصل شود. از اینکه بنابر فرض استقراء مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ مستقل خطی است و از اینکه λ_i ها طبق فرض متمایز هستند نتیجه می‌گیریم که

$$c_1 = \dots = c_r = 0$$

پس از رابطه (۷-۲-۱) نتیجه می‌شود $c_{r+1}\alpha_{r+1} = 0$. چون α_{r+1} طبق تعریف بردار ویژه مخالف صفر است نتیجه می‌گیریم که c_{r+1} نیز برابر صفر است. با توجه به اینکه هر مجموعه حاوی یک بردار غیر صفر مستقل خطی است، اثبات استقرایی کامل می‌باشد. ■

از قضیه فوق نتیجه زیر بدیهی است.

نتیجه ۷-۲-۱ یک شرط کافی برای این که یک ماتریس $n \times n$ قطری‌شدنی باشد این است که دارای تعداد n مقدار ویژه متمایز باشد.

(دوبرو)

مثال ۷-۲-۴ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

دارای معادله مشخصه

$$(t-1)(t+3)(t-2) = 0$$

است و در نتیجه دارای سه مقدار ویژه متمایز $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 2$ پس بدون اینکه نیازی به یافتن بردارهای ویژه A باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که A قطری‌شدنی است. ■

تذکر: باید توجه داشت که داشتن n مقدار ویژه متمایز فقط یک شرط کافی برای

قطری‌شدنی بودن یک ماتریس $n \times n$ است و ممکن است یک ماتریس $n \times n$ بدون

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ -2 & -3-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ -2 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)(-3-t) = 0$$

$\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 2$