

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ملاحظه: باید از ضریب در علامت و علامت در سطر قرار داد و شکل باقیمانده در سطر دیگر می‌ماند.

$$\rightarrow = (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

بر حسب سطر اول و سطرهای دیگر قابل استنتاج است.

۱. خواص دترمینان ۱ - A دارد پذیرا اگر و تنها اگر $|A| \neq 0$.

۲. اگر در A دو سطر (یا دو ستون) متناسب باشند، $|A| = 0$.

۳. اگر یک سطر (یا یک ستون) A را در ضریب α ضرب کنیم، دترمینان α برابر می‌شود.

✍

فصل ۷

مقادیر و بردارهای ویژه

مقدمه

در این فصل خواهیم دید که به هر ماتریس $n \times n$ اعدادی خاص و به هر عدد یک زیر فضای خاص از R^n منسوب است و این اعداد و زیرفضاها بسیاری از ویژگیهای مهم ماتریس را معین می‌کنند.

اهداف آموزشی

مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و فضاها و ویژگیهای ویژه یک ماتریس مربع رابطه بین مقادیر ویژه و دترمینان و همچنین اثر یک ماتریس مربع قطری شدنی بودن یک ماتریس و قضایای مربوطه روش قطری کردن ماتریسهای متقارن ماتریسهای متعامد و تبدیلات متعامد بدون تغییر ماندن حاصلضرب داخلی، و در نتیجه ثابت ماندن طول بردارها و زاویه بین بردارها، تحت تبدیلات خطی متعامد

۷-۱ مقادیر و بردارهای ویژه

تعریف ۷-۱-۱ فرض کنید A یک ماتریس مربع باشد، اگر عددی مانند λ و ماتریسی ستونی مانند $x \neq 0$ وجود داشته باشد طوری که

$$Ax = \lambda x$$

آنگاه λ را یک مقدار ویژه A ، x را یک بردار ویژه A متناظر با λ و زوج (λ, x) را یک زوج ویژه A می‌نامیم.

تذکر: توجه کنید که با ضرب طرفین رابطه $Ax = \lambda x$ در اسکالر $c \neq 0$ داریم:

$$cAx = c\lambda x$$

یا

$$A(cx) = \lambda(cx)$$

یعنی اگر x یک بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ باشد هر ضربی از x نیز یک بردار ویژه A متناظر با λ خواهد بود. در واقع داریم:

قضیه ۷-۱-۱ اگر A یک ماتریس $n \times n$ و λ یک مقدار ویژه آن باشد، آنگاه مجموعه همه بردارهای ویژه متناظر با λ (به اضافه بردار صفر) یک زیر فضای R^n است. اثبات: فرض کنید x و y دو بردار ویژه A متناظر با λ باشند، پس داریم

$$Ax = \lambda x$$

$$Ay = \lambda y$$

با ضرب طرفین دو رابطه فوق به ترتیب در اعداد حقیقی a و b و سپس جمع طرفین دو رابطه داریم

$$A(ax + by) = \lambda(ax + by)$$

یعنی $ax + by$ نیز یک بردار ویژه A متناظر با λ است و اثبات کامل می‌باشد.  زیر فضای مذکور در قضیه فوق را فضای ویژه λ می‌نامیم. قضیه زیر راهی برای یافتن کلیه مقادیر ویژه یک ماتریس، فراهم می‌سازد.

قضیه ۷-۱-۲ یک مقدار ویژه ماتریس A است اگر و تنها اگر

$$|A - \lambda I| = 0$$

اثبات: رابطه $Ax = \lambda x$ ، $x \neq 0$ که نشان می‌دهد λ یک مقدار ویژه A است معادل است با

$$(A - \lambda I)x = 0$$

و چون $x \neq 0$ است رابطه فوق معادل است با اینکه ماتریس $(A - \lambda I)$ منفرد است (نتیجه ۲-۵-۴) و چون ماتریس مربع منفرد است اگر و تنها اگر دترمینان آن برابر صفر باشد (قضیه ۶-۴-۳)، اثبات کامل است. ■

از قضیه فوق چنین نتیجه می‌گیریم که برای یافتن کلیه مقادیر ویژه ماتریس A کافیهست معادله

$$|A - tI| = 0$$

را که یک معادله بر حسب t است، حل کنیم. جوابهای این معادله، که معادله مشخصه A نامیده می‌شود، مقادیر ویژه A خواهند بود.

مثال ۷-۱-۱ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. برای یافتن مقادیر ویژه A می‌نویسیم

$$\begin{aligned} |A - tI| &= \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 3 & -t \end{vmatrix} \\ &= -t(2-t) - 3 \end{aligned}$$

پس معادله مشخصه A عبارتست از

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

که دارای دو ریشه $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 3$ است.

برای یافتن فضای ویژه λ_1 می‌نویسیم

$$Ax = \lambda_1 x$$

یا

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

یا

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \leftarrow \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_1 = c \rightarrow x_2 = -3c$$

دستگاه فوق بینهایت جواب به صورت

$$x = \begin{bmatrix} c \\ -3c \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

دارد. پس فضای ویژه λ_1 عبارتست از

$$W_{\lambda_1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

بنابراین فضای ویژه λ_1 یک زیر فضای یک بعدی از $\mathbb{R}^2$ است.

برای یافتن فضای ویژه λ_2 به طور مشابه عمل می‌کنیم. می‌نویسیم

$$(A - \lambda_2 I) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

یا

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

پس جواب دستگاه برابر است با

$$\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

پس فضای ویژه λ_2 عبارتست از

$$W_{\lambda_2} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

بنابراین فضای ویژه λ_2 یک زیر فضای یک بعدی دیگری از $\mathbb{R}^2$ است. ■

در حالت کلی معادله مشخصه یک ماتریس $n \times n$ یک معادله درجه n است، زیرا

اگر ماتریس $(A - tI)$ را با B نشان دهیم داریم

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - t \end{bmatrix}$$

و

$$|B| = \sum_{j_1, \dots, j_n \in S_n} \text{sgn}(j_1, \dots, j_n) b_{1j_1} \cdots b_{nj_n}$$

14 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \varepsilon & \omega & 2 \\ \nu & \lambda & \alpha \end{bmatrix}$

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ \varepsilon & \omega-t & 2 \\ \nu & \lambda & \alpha-t \end{vmatrix} = (-1)(1-t) \begin{vmatrix} \omega-t & 2 \\ \lambda & \alpha-t \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^2 \begin{vmatrix} \varepsilon & 2 \\ \nu & \alpha-t \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} \varepsilon & \omega-t \\ \nu & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-t)[(\omega-t)(\alpha-t) - 2\lambda] - 2[\varepsilon(\alpha-t) - 2\nu] +$$

$$+ 3[\varepsilon\lambda - \nu(\omega-t)] = (1-t)(t^2 - 15t - 3) - 2(-5t - 2) +$$

$$+ 3(-\nu t - 3) = t^2 - 15t - 3 - t^2 + 15t + 3t + 10 - 21t - 9$$

~~$$= -t^2 + 15t^2 - 25t$$~~

$$|A - tI| = 0 \iff -t^2 + 15t^2 - 25t = 0 : A \text{ invertible}$$

$$t = 0 \text{ ! لا بد !} \rightsquigarrow -t^2 + 15t^2 - 25t = 0 \rightsquigarrow$$

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4 \times 1 \times (-25)}}{-1} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 92}}{-1} = \frac{-15 \pm \sqrt{133}}{-1}$$

$$\rightsquigarrow t = \frac{-15 \pm 11.75}{-1} \quad \begin{cases} \frac{15 + 11.75}{1} = 1.7125 \\ \frac{15 - 11.75}{1} = 1.125 \end{cases}$$

$$\mathbb{C} = \text{مجموعه اعداد مختلط} = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

مقادیر و بردارهای ویژه ۱۹۹

یکی از جملات مجموع فوق $b_{11} \dots b_{nn} = (a_{11} - t) \dots (a_{nn} - t)$ است که یک چند جمله‌ای درجه n بر حسب t است. چون بقیه جملات مجموع فوق بر حسب t از درجه کمتر از n هستند (چرا)؟ نتیجه می‌گیریم که $|B|$ یک چند جمله‌ای درجه n بر حسب t است. دترمینان $|A - tI|$ را چند جمله‌ای مشخصه A می‌نامیم. بنابراین برای یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس $n \times n$ باید یک معادله درجه n را حل کنیم.

توجه: در حالت کلی بعضی از ریشه‌های این معادله مختلط خواهند بود، اما در این کتاب، به استثنای قضیه ۷-۳-۱، صرفاً با مقادیر ویژه حقیقی سروکار خواهیم داشت و هرگاه به مقادیر ویژه یک ماتریس اشاره شود منظور مقادیر ویژه حقیقی آن خواهد بود، مگر اینکه برخلاف آن تأکید شود.

مثال ۷-۱-۲ ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ دارای معادله مشخصه $t^2 + 1 = 0 \rightarrow t = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

است و در نتیجه مقدار ویژه (حقیقی) ندارد.

معادله مشخصه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عبارتست از $|A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 = (t-1)^2$
 $(t-1)^2 = 0$

این معادله دارای ریشه مضاعف $\lambda = 1$ است. گوئیم این ماتریس دارای یک مقدار ویژه برابر ۱ با دو بار تکرار است. به سادگی مشابه مثال ۷-۱-۱ می‌توان نشان داد که بردارهای ویژه متناظر با این مقدار ویژه مضارب از بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هستند. یعنی فضای ویژه این مقدار ویژه یک زیر فضای یک بعدی از $\mathbb{R}^2$ است.

$$(A - I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به‌طور کلی گوئیم مقدار ویژه λ از ماتریس A دارای k تکرار است اگر چند جمله‌ای مشخصه A دارای عامل $(\lambda - t)^k$ باشد.

مثال ۷-۱-۳ معادله مشخصه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عبارتست از

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$t(t-1)^2 = 0$$

پس A دارای یک مقدار ویژه $\lambda_1 = 0$ و یک مقدار ویژه تکراری $\lambda_2 = 1$ (با دو بار تکرار) است. فضای ویژه λ_1 از حل دستگاه

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_3$$

معین می شود. این دستگاه معادل دستگاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_3$$

است که معادل دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

می باشد. جواب این دستگاه عبارتست از

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

یعنی فضای ویژه λ_1 زیر فضای یک بعدی

$$W_{\lambda_1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

از $\mathbb{R}^3$ است. برای تعیین فضای ویژه λ_2 دستگاه مربوطه عبارتست از

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_3 \rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

جواب: $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

که جواب آن را به صورت

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R$$

می نویسیم، یعنی فضای ویژه λ_2 عبارتست از

$$W_{\lambda_2} = \left\{ x \in R^3 \mid x = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R \right\}$$

که یک زیر فضای دوبعدی از R^3 است. ■

قضیه زیر رابطه مقادیر ویژه بعضی ماتریسها را نشان می دهد.

قضیه ۷-۱-۳ فرض کنید A یک ماتریس مربع و (λ, α) یک زوج ویژه آن باشد، آنگاه

(الف) λ یک مقدار ویژه A نیز هست.

(ب) اگر A وارون پذیر باشد، $(\frac{1}{\lambda}, \alpha)$ یک زوج ویژه A^{-1} است.

(پ) $(\alpha$ و $1 - \lambda)$ یک زوج ویژه $I - A$ است.

(ت) $(c\lambda, \alpha)$ ، $c \neq 0$ ، یک زوج ویژه cA است.

اثبات: (الف) معادله مشخصه A عبارتست از:

$$|A - tI| = 0$$

چون دترمینان ترانواده هر ماتریس با دترمینان خود ماتریس برابر است، معادله فوق را

می توان به صورت

$$|(A - tI)'| = 0$$

یا به صورت

$$|A' - tI| = 0$$

نوشت. اما معادله اخیر معادله مشخصه A' است، پس معادله مشخصه A' همان معادله

مشخصه A است و در نتیجه A و A' مقادیر ویژه یکسان دارند.

(ب) می توان نوشت

$$Ax = \lambda x$$

طرفین رابطه فوق را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم

$$x = A^{-1}(\lambda x)$$

چون طبق تعریف بردار ویژه $x \neq 0$ است نتیجه می‌گیریم که $\lambda \neq 0$ است، پس می‌توان نوشت

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

پس نه تنها $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه A^{-1} است، بلکه بردار ویژه متناظر با آن همان بردار ویژه A متناظر با λ است.

اثبات قسمتهای (پ) و (ت) را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. ■

$$Ax = \lambda x \rightarrow (I - A)x = x - Ax = x - \lambda x = (1 - \lambda)x$$

تذکر: توجه کنید که اگر (λ, α) یک زوج ویژه A باشد، لزوماً یک زوج ویژه A' نیست. ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در مثال ۷-۱-۲ این مطلب را تأیید می‌کند. قضیه زیر بر اهمیت مقادیر ویژه می‌افزاید.

قضیه ۷-۱-۴ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر مقادیر ویژه A ، $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ به ترتیب با تعداد تکرار $r_1, \dots, r_k$ باشد آنگاه

$$|A| = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_k^{r_k} \quad (\text{الف})$$

$$\text{tr} A = r_1 \lambda_1 + \dots + r_k \lambda_k \quad (\text{ب})$$

که در آن $\text{tr} A$ یعنی اثر ماتریس مربع A و برابر $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ می‌باشد.

اثبات: الف) معادله مشخصه A یعنی معادله

$$|A - tI| = 0$$

را می‌توان به صورت

$$|tI - A| = 0$$

نوشت (چرا؟). اما داریم

$$tI - A = \begin{bmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{bmatrix}$$

چون تنها جمله بسط $|tI - A|$ که نسبت به t از درجه n است، جمله

$$(t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn}) \quad (1-1-7)$$

می باشد، پس ضریب t^n در $|tI - A|$ برابر واحد است. در نتیجه می توان نوشت

$$f(t) = |tI - A| = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}t + c_n$$

$f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$
 $\hookrightarrow f(0) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = c_n \rightarrow c_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ که $c_1, \dots, c_n$ ضرایب حقیقی هستند.
 از جبر دیوستان می دانیم که حاصلضرب ریشه های معادله $f(t) = 0$ (با احتساب

تکرار) برابر c_n یعنی برابر $(-1)^n f(0)$ است. از طرفی

$$f(0) = |0 \times I - A| = |-A| = (-1)^n |A| = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

نتیجه می گیریم

$$|A| = c_n = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

یعنی $|A|$ برابر است با حاصلضرب ریشه های معادله مشخصه، که همان نتیجه مطلوب است.

ب) به استثنای حاصلضرب درایه های قطر اصلی ماتریس $(tI - A)$ ، یعنی به استثنای جمله $(1-1-7)$ ، بقیه جملات در دترمینان $(tI - A)$ حداکثر از درجه $(n-2)$ هستند. (چرا؟). پس در $f(t)$ ضریب t^{n-1} از همان جمله $(1-1-7)$ یعنی از

$$t^{n-1} + \cdots (t - a_{11}) \cdots (t - a_{nn})$$

به دست می آید. اما در چند جمله ای فوق ضریب t^{n-1} برابر $-(a_{11} + \cdots + a_{nn})$ یعنی

$$(t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn}) = t^{n-1} + \cdots$$

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (i=0, \dots, n)$$

$$f(\lambda) = 0 \rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\rightarrow a_n (\bar{\lambda})^n + a_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + a_1 (\bar{\lambda}) + a_0 = 0 \quad \text{جبر خطی برای آمار}$$

برابر $\text{tr} A = -c_1$ است، یعنی c_1 از طرفی از جبر دبیرستان می دانیم که مجموع

ریشه های معادله $f(t) = 0$ برابر قرینه ضریب t^{n-1} یعنی برابر $-c_1$ است. پس

مجموع ریشه های معادله مشخصه (با احتساب تکرار) $\text{tr} A =$

و اثبات کامل است. ■

تذکر: توجه کنید که در صورت قضیه فوق حقیقی بودن مقادیر ویژه فرض نشده

است. با توجه به اینکه در یک معادله درجه n تعداد ریشه های مختلط (در صورت

وجود) زوج است و هر دو ریشه مختلط مزدوج یکدیگر هستند حقیقی بودن دترمینان و

اثر یک ماتریس مربع با مختلط بودن بعضی از مقادیر ویژه آن تناقض ندارد.

نتیجه ۷-۱-۱ ماتریس مربع A وارون پذیر است اگر و تنها اگر هیچ یک از مقادیر ویژه آن

$$\text{صفر نباشد.} \quad \text{نشان: } t=0 \rightarrow |A - tI| = 0 \leftrightarrow |A| \neq 0 \leftrightarrow A \text{ وارون پذیر}$$

اثبات: با توجه به قضیه فوق و رابطه وارون پذیری A با مقدار دترمینان A ، واضح است. ■

۷-۲ قطری کردن ماتریسها

تعریف ۷-۲-۱ ماتریس مربع A را قطری شدنی می گویم اگر ماتریس نامنفردی مانند

P و یک ماتریس قطری با درایه های حقیقی مانند D وجود داشته باشد طوری که

$$A = P D P^{-1}$$

قطری کردن یک ماتریس یعنی یافتن ماتریسهای P و D که در رابطه فوق صدق کنند، در

جبر خطی کاربردی از اهمیت زیادی برخوردار است. در این بخش شرایطی را که تحت

آنها یک ماتریس مربع قطری شدنی است بررسی می کنیم.

قضیه ۷-۲-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، در این صورت A قطری شدنی

است اگر و تنها اگر A دارای n بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه حقیقی

باشد.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهای ویژه A به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه