

$$L(a_1x_1 + \dots + a_kx_k) = \theta_W$$

یعنی

$$a_1x_1 + \dots + a_kx_k \in \ker L$$

چون L طبق فرض لزوم یک به یک است نتیجه می‌گیریم که

$$a_1x_1 + \dots + a_kx_k = \theta_V$$

و از استقلال X نتیجه می‌گیریم که $a_1 = \dots = a_k = 0$. یعنی مجموعه

$Z = \{L(x_1), \dots, L(x_k)\}$ مستقل خطی است. ■

۵-۳-۳ برد یک تبدیل خطی

گرچه در یک تبدیل خطی L از V به W همه اعضای V شرکت می‌کنند، یعنی دامنه تبدیل تمام V را دربر می‌گیرد، ولی ممکن است مجموعه نگاره‌های اعضای V ، تمام W را دربر نگیرد. در نتیجه تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵-۳-۱ فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی است، آنگاه برد L ، که آنرا با $\text{ran} L$ نشان می‌دهیم، عبارت است از مجموعه اعضای W که نگاره عضوی از V تحت L هستند، یعنی

$$\text{ran} L = \{u \in W \mid \exists x \in V \text{ s.t. } L(x) = u\}$$

یا

$$\text{ran} L = \{L(x) \mid x \in V\}$$

قضیه ۵-۳-۱ برد هر تبدیل خطی یک زیرفضای مجموعه انجام است.

اثبات: تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $a, b \in R$, $u, v \in \text{ran} L$ پس وجود دارد $x, y \in V$ طوری که

$$L(x) = u, \quad L(y) = v$$

می‌توان نوشت

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y) = au + bv$$

پس $au + bv \in \text{ran} L$ و اثبات (طبق قضیه ۵-۳-۱) کامل است. ■

مثال ۵-۳-۱ برد تبدیل خطی مثال ۵-۲-۴ را می‌یابیم. فرض کنید $u \in \mathbb{R}^3$

$$L(x) = u$$

به تساوی

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

منجر می‌شود که معادل دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = u_1 \\ x_1 - x_2 = u_2 \\ 3x_1 + x_2 = u_3 \end{cases}$$

است. شکل پلکانی سطری ماتریس افزوده دستگاه فوق عبارت است از

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \\ 0 & 0 & u_3 - u_2 - 2u_1 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = u_1 \\ u_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \\ 0 = u_3 - u_2 - 2u_1 \end{cases}$$

با توجه به تذکر متعاقب مثال ۲-۲-۲ دستگاه فوق در صورتی دارای جواب است که

$$u_3 - u_2 - 2u_1 = 0$$

مثلاً $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ نگاره هیچ بردار $\mathbb{R}^2$ تحت تبدیل خطی L نیست. ضمناً داریم

$$\text{ran } L = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_3 = u_2 + 2u_1\}$$

یعنی

$$\text{ran } L = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 + 2u_1 \end{bmatrix}, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

یا

$$\text{ran } L = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \mid u = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

چون دو بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند (چرا؟) نتیجه می‌گیریم که

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

برد L یک زیرفضای R^3 با بعد ۲ است. ■

هر تبدیل خطی را که در تعریف ۳-۶-۱ صدق کند یک تبدیل خطی پوشا می‌نامیم، یعنی تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ را پوشا می‌نامیم اگر به ازای هر $u \in W$ برداری مانند $x \in V$ وجود داشته باشد طوری که $u = L(x)$. به عبارت دیگر L را پوشا می‌نامیم اگر $\text{ran } L = W$. مثلاً تبدیل خطی مثال قبل پوشا نیست چون $\text{ran } L \neq R^3$.

مثال ۵-۳-۲ تبدیل خطی $L: P_2 \rightarrow R$ به صورت

$$L(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

$$= \int_0^1 (at^2 + bt + c) dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \quad \forall f \in P_2$$

پوشا است، زیرا فرض کنید $r \in R$ آنگاه معادله

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = r$$

که در آن r معلوم و a و b و c مجهول‌اند، به ازای هر $r \in R$ دارای بینهایت جواب است، یعنی

$$\text{ran } L = R$$

مثال ۵-۳-۳ می‌خواهیم تحقیق کنیم که آیا تبدیل خطی $L: R^4 \rightarrow R^3$ به صورت

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in R^4, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

پوشا است. این تبدیل خطی در صورتی پوشا است که معادله

$$Ax = u$$

به ازای هر $u \in R^3$ جواب داشته باشد، یا دستگاهی با ماتریس افزوده

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & u_2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & u_3 \end{array} \right]$$

به ازای هر سه عدد حقیقی u_1 و u_2 و u_3 جواب داشته باشد. پس از تبدیل ماتریس فوق به شکل پلکانی سطری، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \vdots & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & u_3 - u_2 - u_1 \end{bmatrix}$$

حاصل می شود. پس (با توجه به تذکر متعاقب مثال ۲-۲-۲) در صورتی جواب دارد که

$$u_3 - u_2 - u_1 = 0$$

مثلاً دستگاه بازای $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب ندارد. یعنی $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به برد L تعلق ندارد. پس L

پوشا نیست. ضمناً می توان نوشت

$$\text{ran } L = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, u_3 = u_1 + u_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{یا} \quad \text{ran } L = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

چون بردارهای $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند. (چرا؟) نتیجه می گیریم که

$$\dim(\text{ran } L) = 2. \text{ از طریق دیگر نیز می توان به همین نتیجه رسید:}$$

می دانیم دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ در صورتی جواب دارد که $\mathbf{u}$ متعلق به فضای ستونی A

باشد (قضیه ۳-۸-۷) و چون $r(A) = 2$ (تحقیق کنید) نتیجه می گیریم که

$$\dim(\text{ran } L) = 2 < 3. \text{ پس } \text{ran } L \neq \mathbb{R}^3, \text{ یعنی } L \text{ پوشا نیست.} \blacksquare$$

می توان (به عنوان تمرین) نشان داد که هسته تبدیل خطی مثال فوق عبارت

است از

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

تاریخ: /

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

مستقل خطی

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \rightarrow c_2 = -c_3 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \rightarrow c_1 = -c_3 \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} : c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

* مجموعه جواب *

کے بنیاتی جواب نہ صفر دارد. لذا مجموعه $\equiv$ رنک A و اہم خبر
 $\sim$ لذا خبر فضا رنک A ، $\equiv$ $\sim$ ہے.
 $\rightarrow \text{rank}(A) = 2$

$$AX = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ -x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \ker L$$

$$\ker L = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \dim \ker L = 2$$

$$\ker L = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} = a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, ab \in \mathbb{R} \right\}$$

و در نتیجه مجموع بعدهای $\ker L$ و $\text{ran} L$ برابر ۴ یعنی بعد $\mathbb{R}^4$ است. همین رابطه در مورد تبدیل خطی مثالهای ۵-۲-۴ و ۵-۳-۱ نیز صادق است، یعنی مجموع بعدهای هسته و برد تبدیل برابر بعد دامنه تبدیل است. قضیه مهم زیر که به «قضیه جمع ابعاد» معروف است نشان می‌دهد که این امر کلیت دارد.

قضیه ۵-۳-۲ (قضیه جمع ابعاد) اگر V یک فضای برداری با بُعد متناهی و $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه

$$\dim(\ker L) + \dim(\text{ran} L) = \dim V$$

اثبات: فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی و $\dim(\ker L) = k$ باشد. اگر $k = n$ آنگاه $\ker L = V$ ، یعنی همه اعضای V به θ_W نگاشته می‌شوند یعنی $\text{ran} L = \{\theta_W\}$. چون $\dim(\{\theta_W\}) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که قضیه به‌ازای $k = n$ درست است.

حال فرض کنید $k < n$ و فرض کنید $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ یک پایه برای $\ker L$ باشد. این پایه را (طبق قضیه توسعه پایه، قضیه ۳-۵-۱) می‌توانیم به یک پایه

$$T' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$$

برای V_n توسعه دهیم. ثابت می‌کنیم که $S = \{L(\alpha_{k+1}), \dots, L(\alpha_n)\}$ یک پایه برای $\text{ran} L$ است. ابتدا نشان می‌دهیم که S مولد $\text{ran} L$ است. فرض کنید $z \in \text{ran} L$ یعنی فرض کنید برداری مانند $x \in V_n$ وجود دارد طوری که $L(x) = z$. به‌طور یکتا می‌توان نوشت

$$x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n$$

که $a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی هستند. پس

$$z = L(x)$$

$$= a_1 L(\alpha_1) + \dots + a_k L(\alpha_k) + a_{k+1} L(\alpha_{k+1}) + \dots + a_n L(\alpha_n).$$

اما k جمله اول سمت راست تساوی فوق برابر θ_W است، چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \ker L$.

پس

$$z = a_{k+1}L(\alpha_{k+1}) + \dots + a_nL(\alpha_n).$$

 پس S مولد $\text{ran}L$ است.

 اکنون نشان می‌دهیم که S مستقل خطی است. فرض کنید

$$c_{k+1}L(\alpha_{k+1}) + \dots + c_nL(\alpha_n) = \theta_W, \quad c_{k+1}, \dots, c_n \in R$$

پس

$$L(c_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + c_n\alpha_n) = \theta_W$$

یعنی

$$c_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + c_n\alpha_n \in \ker L$$

 چون T پایه $\ker L$ است، می‌توان نوشت

$$c_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + c_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + \dots + b_k\alpha_k$$

یا

$$b_1\alpha_1 + \dots + b_k\alpha_k + b_{k+1}\alpha_{k+1} + \dots + b_n\alpha_n = \theta_V$$

که در آن

$$b_j = -c_j, \quad j = k+1, \dots, n$$

 چون T' برای V_n پایه است و در نتیجه مستقل خطی می‌باشد نتیجه می‌گیریم که

$$b_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

یعنی

$$c_j = 0, \quad j = k+1, \dots, n$$

 که استقلال خطی S را نتیجه می‌دهد.  ■

می‌دانیم که در حالت کلی یک به یک بودن یا پوشا بودن هیچکدام دیگری را نتیجه نمی‌دهد ولی قضیه زیر نشان می‌دهد که هنگامی که دامنه و فضای انجام یک تبدیل خطی هم‌بعد باشند، یک به یک بودن و پوشا بودن معادل هستند.

قضیه ۳-۳-۵ فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی و $\dim V = \dim W$ ، آنگاه L یک

به یک است اگر و تنها اگر L پوشا باشد.
اثبات:

(کفایت) فرض کنید L پوشا است. آنگاه از قضیه جمع ابعاد (قضیه قبل) نتیجه می‌گیریم که

$$\dim(\ker L) = 0$$

یعنی $\ker L = \theta_V$ و از قضیه ۲-۲-۵ نتیجه می‌شود که L یک به یک است.
(لزوم) فرض کنید L یک به یک است. از قضیه جمع ابعاد نتیجه می‌گیریم که
 $\dim(\operatorname{ran} L) = \dim W$ یعنی $\operatorname{ran} L = W$ ، یعنی L پوشا است. ■

از قضیه جمع ابعاد رابطه‌ای در مورد رتبه ماتریسها نیز نتیجه می‌شود.

تعریف ۲-۳-۵ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه مجموعه

$$\{x \in R^n \mid Ax = 0_m\}$$

را فضای پوچی A نامیده و با $ns(A)$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان نشان داد که $ns(A)$ یک زیر فضای R^n است.

قضیه ۲-۳-۵ اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد آنگاه

$$\dim(ns(A)) + r(A) = n$$

اثبات: تبدیل خطی $L: R^n \rightarrow R^m$ را به صورت

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in R^n$$

تعریف می‌کنیم. داریم

$$\ker L = \{x \in R^n \mid Ax = 0_m\}$$

بدیهی است که

$$ns(A) = \ker L \quad (۱-۳-۵)$$

از طرفی

$$\text{ran } L = \{u \in R^m \mid \exists x \in R^n \text{ s.t. } Ax = u\}$$

$$= \{u \in R^m \mid \text{معادله } Ax = u \text{ جواب دارد}\}$$

با توجه به قضیه ۳-۸-۷

$$\{u \in R^m \mid u \in A \text{ فضای ستونی}\}$$

پس فضای ستونی $\text{ran } L = A$ و در نتیجه

$$\dim(\text{ran } L) = r(A) \quad (۲-۳-۵)$$

حال حکم از روابط (۱-۳-۵) و (۲-۳-۵) و قضیه جمع ابعاد ثابت است. ■

۴-۵ وارون یک تبدیل خطی

اگر تبدیل خطی L از فضای برداری V به فضای برداری W یک به یک و پوشا باشد، به طور شهودی بدیهی به نظر می‌رسد که می‌توان یک تبدیل خطی یک به یک و پوشا مانند H از W به V تعریف کرد طوری که بازای هر $x \in V$ ، $H(L(x)) = x$ باشد. در این بخش این واقعیت را ثابت خواهیم کرد.

تعریف ۱-۴-۵ تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ را وارون پذیر می‌نامیم اگر یک تبدیل خطی مانند $H: W \rightarrow V$ وجود داشته باشد طوری که

$$H(L(x)) = x, \quad \forall x \in V$$

و

$$L(H(u)) = u, \quad \forall u \in W$$

در این صورت H را وارون L نامیده و با L^{-1} نشان می‌دهیم.

قضیه ۱-۴-۵ فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی است، آنگاه L وارون پذیر است اگر و تنها اگر $L(i)$ یک به یک باشد و $L(ii)$ پوشا باشد.
اثبات:

(کفایت) چون L پوشا است به ازای هر $u \in W$ برداری مانند $x \in V$ وجود دارد

طوری که $L(x) = u$. چون L یک به یک است این x یکتا است. بنابراین تابعی از W به V مانند H می توان تعریف کرد طوری که به ازای هر $u \in W$, $H(u) = x$. بدیهی است که H واقعاً یک تابع است و

$$H(L(x)) = H(u) = x, \quad \forall x \in V$$

و

$$L(H(u)) = L(x) = u, \quad \forall u \in W$$

پس تابع H وارون تابع L است. حال باید نشان دهیم که H (که از این به بعد آن را با L^{-1} نشان می دهیم) یک تبدیل خطی است

فرض کنید $u, v \in W$ و x, y نگاره های آنها تحت تابع L^{-1} باشند. در این صورت داریم

$$u = L(x), \quad v = L(y), \quad x = L^{-1}(u), \quad y = L^{-1}(v)$$

و اگر a و b دو عدد حقیقی باشند داریم

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$$

$$= au + bv$$

پس

$$L^{-1}(L(ax + by)) = L^{-1}(au + bv)$$

یا

$$ax + by = L^{-1}(au + bv)$$

$$aL^{-1}(u) + bL^{-1}(v) = L^{-1}(au + bv).$$

پس L^{-1} یک تبدیل خطی است.

(لزوم) فرض کنید L وارون پذیر است، یعنی L^{-1} وجود دارد. در این صورت اگر

$$x, y \in V$$

$$L(x) = L(y)$$

داریم

$$L^{-1}(L(x)) = L^{-1}(L(y))$$

یعنی

$$x = y$$

یعنی L یک به یک است. همچنین چون $L^{-1}(u)$ به ازای هر $u \in W$ تعریف شده است داریم

$$L^{-1}(u) \in V, \quad \forall u \in W$$

یعنی به ازای هر $u \in W$ وجود دارد $x \in V$ طوری که

$$L^{-1}(u) = x$$

یا

$$L(L^{-1}(u)) = L(x)$$

یا

$$u = L(x).$$

پس L پوشا است. ■

قضیه ۴-۵-۲

(الف) وارون یک تبدیل خطی وارون پذیر یکتا است.

(ب) وارون وارون یک تبدیل خطی برابر خود آن تبدیل خطی است، یعنی

$$(L^{-1})^{-1} = L$$

اثبات: (الف) فرض کنید L یک تبدیل خطی وارون پذیر و H و G هر دو وارونهای L باشند. طبق تعریف وارون به ازای هر $u \in W$ داریم

$$L(H(u)) = u$$

$$L(G(u)) = u$$

پس به ازای هر $u \in W$ داریم

$$L(H(u)) = L(G(u))$$

و چون L یک به یک است (قضیه قبل) داریم

$$H(u) = G(u), \quad \forall u \in W$$

و اثبات کامل است.

(ب) از تعریف وارون یک تبدیل خطی بدیهی است که L^{-1} وارون پذیر است و یک

وارون آن خود L است. از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که L تنها وارون L^{-1} است یعنی

$$(L^{-1})^{-1} = L \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۴-۱ تابع $L: P_2 \rightarrow R^3$ را به صورت

$$L(f) = \begin{bmatrix} a+b \\ a-c \\ b-c \end{bmatrix}, \quad \forall f(t) = at^2 + bt + c \in P_2$$

را در نظر بگیرید. L یک تبدیل خطی از P_2 به R^3 است (چرا؟). یک به یک بودن و پوشا بودن L از اینکه معادله

$$\begin{bmatrix} a+b \\ a-c \\ b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

که معادل دستگاه

$$\begin{cases} a+b=a' \\ a-c=b' \\ b-c=c' \end{cases}$$

است، به ازای هر $u = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in R^3$ جواب یکتای $a = \frac{1}{3}(a' + b' + c')$ ، $b = \frac{1}{3}(a' - b' - c')$

و $c = \frac{1}{3}(a' - b' + c')$ دارد، نتیجه می‌شود. پس L یک تبدیل خطی وارون پذیر است و تبدیل خطی $L^{-1}: R^3 \rightarrow P_2$ به صورت

$$L^{-1}(u) = \frac{1}{3}(a' + b' + c')t^2 + \frac{1}{3}(a' - b' - c')t + \frac{1}{3}(a' - b' + c'), \quad \forall u = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in R^3$$

وارون یکتای L است. $\blacksquare$

مثال ۵-۴-۲ تبدیل خطی $L: R^2 \rightarrow R^2$ را به صورت

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in R^2, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تبدیلات خطی ۱۶۷}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تبدیلات خطی ۱۶۷}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیلات خطی ۱۶۷}} \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. این یک تبدیل وارون پذیر است زیرا با توجه به وارون پذیر بودن A معادله

$$Ax = u$$

به ازای هر $u \in \mathbb{R}^2$ جواب یکتای

$$x = A^{-1}u$$

دارد. ضمناً چون $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ داریم

$$L^{-1}(u) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2. \quad \blacksquare$$

$$\dim V = n$$

ملاحظه می کنیم که دامنه و مجموعه انجام تبدیلهای خطی وارون پذیر دو مثال فوق هم بعد هستند. همانطور که قضیه زیر نشان می دهد، این واقعیت کلیت دارد.

$$T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \text{بازیه}$$

قضیه ۳-۴-۵ اگر تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ وارون پذیر باشد آنگاه

$$\dim(V) = \dim(W)$$

اثبات: تمرین. $\blacksquare$

برای $w \in W$ $\exists v \in V: w = T(v) = \sum_{i=1}^n c_i T(\alpha_i)$

پس $v = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$

پس $\dim W = n$

با توجه به تعریف یکرهختی (تعریف ۳-۶-۳) ملاحظه می شود که یکرهختی بین فضاهای برداری در واقع یک تبدیل خطی وارون پذیر است. در نتیجه می توان گفت دو فضای برداری یکرهخت هستند اگر یک تبدیل خطی وارون پذیر از یکی به دیگری وجود داشته باشد. پس قضیه فوق در واقع حالت کلی تر قضیه ۳-۶-۴ است که اثبات آن به این فصل موکول شد.

با بیان و اثبات قضیه زیر این فصل را به پایان می بریم.

قضیه ۴-۴-۵ فرض کنید $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی به صورت

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in R^n$$

باشد، آنگاه موارد زیر معادل اند:

(الف) A وارون پذیر است.

(ب) L یک به یک است.

(پ) L پوشا است.

(ت) L وارون پذیر است.

اثبات: (الف) $\Leftrightarrow$ (ب) فرض کنید $Ax = 0$. چون A وارون پذیر است داریم

$$x = A^{-1} 0 \\ = 0$$

پس $\ker L = \{0\}$ و بنابر قضیه ۵-۲-۲ L یک به یک است.

(ب) $\Leftrightarrow$ (پ) از قضیه ۵-۳-۳ نتیجه می شود.

(پ) $\Leftrightarrow$ (ت) از قضیه ۵-۳-۳ و قضیه ۵-۴-۱ نتیجه می شود.

(ت) $\Leftrightarrow$ (الف) چون L وارون پذیر است یک به یک می باشد (قضیه ۵-۴-۱). پس معادله

$$Ax = 0$$

جواب یکتا دارد. پس A وارون پذیر است (قضیه ۵-۲-۳). ■

خودآزمایی

۵-۱ آیا اگر $L: R^n \rightarrow R^n$ یک تبدیل خطی پوشا باشد، آنگاه L لزوماً وارون پذیر است؟

۵-۲ آیا اگر تبدیل خطی $L: V_n \rightarrow W_m$ پوشا باشد، آنگاه لزوماً $n \geq m$ ؟

۵-۳ آیا اگر تبدیل خطی $L: R^1 \rightarrow R^1$ به صورت $L(x) = ax + b$ ، $\forall x \in R$ باشد، آنگاه لزوماً $b = 0$ ؟

۵-۴ آیا اگر $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی و $\dim(V) > \dim(W)$ باشد آنگاه L قطعاً نمی تواند یک به یک باشد؟

۵-۵ آیا اگر $L: R^n \rightarrow R^n$ یک تبدیل خطی به صورت $L(x) = Ax$ ، $\forall x \in R^n$ باشد آنگاه L لزوماً پوشا است؟

۵-۶ ماتریس A باید چه ویژگی داشته باشد تا تبدیل خطی $L: R^n \rightarrow R^n$ به صورت $L(x) = Ax$ ، $\forall x \in R^n$ ایجاد دوران کند؟