

فصل ۵

تبدیلات خطی

مقدمه

همان‌طور که می‌دانیم مفهوم «تابع» یک مفهوم اساسی در ریاضیات است و تعریف بسیاری از مفاهیم دیگر ریاضی بر اساس تابع انجام می‌شود. در جبر خطی نیز نوع خاصی از توابع تعریف می‌شوند که نقش مهمی را ایفا می‌کنند. مجموعه‌های آغاز و انجام این توابع فضاهای برداری هستند، مضافاً به اینکه این توابع ویژگیهای خاصی نیز دارند. قبلاً در بخش ششم فصل قبل، با نوع خاصی از این توابع آشنا شده‌ایم. در این فصل ویژگیها و موارد استفاده این گونه توابع را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. در این فصل فرض می‌کنیم همه فضاهای برداری دارای بعد متناهی هستند.

اهداف آموزشی

تبدیل‌های خطی

ماتریس تبدیل خطی و تناظر بین ماتریسها و تبدیلات خطی

محاسبه هسته و برد تبدیلات خطی

قضیه جمع ابعاد در مورد فضاهای برداری

شرایط وارون‌پذیری تبدیلات خطی

محاسبه وارون تبدیل خطی در صورت وجود

۱-۵ تعاریف اولیه

تعریف ۱-۱-۵ فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند. تابع

$$L: V \rightarrow W$$

را یک تبدیل خطی از V به W می‌نامیم اگر L در دو شرط

$$i) L(x+y) = L(x) + L(y) \quad , \quad \forall x, y \in V$$

$$ii) L(cx) = cL(x) \quad \forall x \in V, \quad \forall c \in R$$

صدق کند. V را دامنه تبدیل خطی L و W را فضای انجام تبدیل خطی L می‌نامیم. اگر $W = V$ آنگاه L را یک عملگر خطی و اگر $W = R$ باشد، L را یک تابع خطی می‌نامیم.

توجه داشته باشید که در تعریف فوق علامت $+$ در سمت چپ رابطه (i) نشانگر جمع برداری در فضای V و در سمت راست همان رابطه نشانگر جمع برداری در فضای W است. همچنین ضرب اسکالر در سمت چپ رابطه (ii) ضرب اسکالر در V و در سمت راست همان رابطه ضرب اسکالر در W است.

نتیجه ۱-۱-۵ تابع $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی از V به W است اگر و تنها اگر

$$L(ax+by) = aL(x) + bL(y) \quad , \quad \forall x, y \in V \quad , \quad \forall a, b \in R$$

اثبات: با توجه به تعریف تبدیل خطی بدیهی است. ■

مثال ۱-۱-۵ فرض کنید $L: R^2 \rightarrow R^2$ یک تابع به صورت

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \forall x \in R^2$$

باشد. آنگاه L یک تبدیل خطی از R^2 به R^2 (یک عملگر خطی بر R^2) است، زیرا فرض کنید $x, y \in R^2$ و $a, b \in R$ ، آنگاه

$$L(ax+by) = L\left(a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= L \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 \\ 2(ax_2 + by_2) \end{bmatrix} \\
&= a \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ 2y_2 \end{bmatrix} \\
&= aL(x) + bL(y). \blacksquare
\end{aligned}$$

مثال ۵-۱-۲ فرض کنید $L: R^3 \rightarrow R^2$ تابعی به صورت

$$L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in R^3$$

باشد. آنگاه L یک تبدیل خطی از R^3 به R^2 است، زیرا فرض کنید $x, y \in R^3$ و $a, b \in R$ آنگاه

$$\begin{aligned}
L(ax + by) &= L \left(a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= L \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2(ax_1 + by_1) \\ -(ax_2 + by_2) \end{bmatrix} \\
&= a \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} \\
&= aL(x) + bL(y). \blacksquare
\end{aligned}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c^2 a_1 a_2 \\ ca_1 + ca_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} ca_1 a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix} = c L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c a_1 a_2 \\ c(a_1 + a_2) \end{bmatrix}$$

مثال ۵-۱-۳ فرض کنید $L: R^2 \rightarrow R^3$ به صورت

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in R^2$$

باشد. آنگاه به طریق مشابه مثالهای قبل می توان نشان داد که L یک تبدیل خطی از R^2 به R^3 است. ■

مثال ۵-۱-۴ تابع $L: R^2 \rightarrow R^2$ به صورت

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in R^2$$

یک تبدیل خطی نیست زیرا اگر $x, y \in R^2$ آنگاه داریم

$$L(x+y) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ 1 + x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

در صورتی که

$$L(x) + L(y) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ 1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 2 + x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$\neq L(x+y)$. ■

مثال ۵-۱-۵ فرض کنید $L: P_2 \rightarrow P_1$ یک تابع به صورت

$$L(f) = f', \quad \forall f \in P_2$$

باشد، که f' مشتق چندجمله ای (درجه ۲ یا کمتر) f و در نتیجه از درجه ۱ یا کمتر است.

چون به ازای هر $f, g \in P_2$ و هر $a, b \in R$ داریم

$$(af + bg)' = af' + bg'$$

نتیجه می گیریم که L یک تابع خطی از P_2 به P_1 است. ■

مثالهای ۵-۱-۱ و ۵-۱-۲ و ۵-۱-۳ حالت خاصی از قضیه زیر هستند.

قضیه ۵-۱-۱ فرض کنید A یک ماتریس $k \times n$ باشد آنگاه تابع $L: R^n \rightarrow R^k$

به صورت

$$L(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = Lx + Ly \quad \forall x \in R^n$$

یک تبدیل خطی از R^n به R^k است. اثبات: تمرین. ■

قضیه فوق نشان می دهد، که هر ماتریس $k \times n$ متناظر با یک تبدیل خطی از R^n به R^k است. قضیه زیر متقابلاً نشان می دهد که هر تبدیل خطی از R^n به R^k متناظر با یک ماتریس یکتای $k \times n$ است. این ماتریس را ماتریس تبدیل نامیم.

قضیه ۵-۱-۲ فرض کنید $L: R^n \rightarrow R^k$ یک تبدیل خطی باشد آنگاه یک ماتریس یکتای $k \times n$ مانند A وجود دارد طوری که

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in R^n$$

اثبات: فرض کنید $T = \{e_1, \dots, e_n\}$ پایه طبیعی R^n ، $c_1, \dots, c_n$ ماتریسهای ستونی k بعدی باشند طوری که

$$L(e_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

حال A را ماتریسی تعریف می کنیم که $c_1, \dots, c_n$ ستونهای آن باشند، یعنی تعریف می کنیم

$$A = [c_1 \mid \dots \mid c_n].$$

در این صورت A یک ماتریس $k \times n$ است. حال اگر $x \in R^n$ باشد، چون T پایه طبیعی R^n است می توان نوشت (مثال ۳-۴-۲)

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

و با توجه به ویژگیهای تبدیل خطی داریم

$$L(x) = L(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$$

$$= x_1 L(e_1) + \dots + x_n L(e_n)$$

$$= x_1 c_1 + \dots + x_n c_n$$

$$= Ax$$

بنابر لم ستونی

برای اثبات یکتا بودن A فرض کنید B ماتریس دیگری باشد طوری که

$$L(x) = Bx, \quad \forall x \in R^n$$

آنگاه می توان نوشت

$$Ae_j = Be_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (1-1-5)$$

اما چون همه درایه های e_j برابر صفر هستند بجز درایه j ام آن که برابر واحد است، از لم ستونی داریم

$$Ae_j = a_{(j)}, \quad Be_j = b_{(j)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

پس رابطه (1-1-5) به این معنی است که ستونهای A نظیر به نظیر با ستونهای B برابر

است یعنی $A = B$. ■

قضیه زیر اهمیت پایه را در تبدیلات خطی نشان می دهد.

قضیه 5-1-3 برای مشخص شدن یک تبدیل خطی مانند L از فضای برداری V به

فضای برداری W کفایست نگاره های اعضای یک پایه V را تحت L بدانیم.

اثبات: فرض کنید $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه برای فضای n بعدی V باشد و فرض کنید

$$L(\alpha_1) = \beta_1, \dots, L(\alpha_n) = \beta_n$$

که L یک تبدیل خطی از V به W است. حال فرض کنید x عضوی از V باشد، آنگاه

چون T برای V پایه است اعداد حقیقی یکتای $c_1, \dots, c_n$ وجود دارند طوری که

$$x = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n,$$

و می توان نوشت

$$L(x) = L(c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n)$$

$$= c_1 L(\alpha_1) + \dots + c_n L(\alpha_n)$$

یعنی با مشخص بودن $L(\alpha_1), \dots, L(\alpha_n)$ ، تبدیل هر عضو V مانند x مشخص است. ■

نتیجه ۵-۱-۲ فرض کنید V_n یک فضای برداری n بعدی و $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه برای آن است. فرض کنید L و H دو تبدیل خطی از V_n به W باشد. اگر به ازای $i = 1, \dots, n$ و $L(\alpha_i) = H(\alpha_i)$ آنگاه

$$L(x) = H(x), \quad \forall x \in V_n$$

یعنی L و H در حقیقت هر دو یک تبدیل خطی هستند.

اثبات: تمرین. ■ $\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n \rightsquigarrow L(\alpha) = \sum_{i=1}^n c_i L(\alpha_i) =$

$$= \sum_{i=1}^n c_i H(\alpha_i) = H(\alpha)$$

مثال ۵-۱-۶ پایه مرتب $T = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$ را برای R^2 در نظر بگیرید و فرض کنید

L یک تبدیل خطی از R^2 به فضای برداری W باشد. چون

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in R^2$$

داریم

$$L(x) = c_1 L \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2 L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

حال اگر $W = R^2$ و

$$L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad L \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$L(x) = c_1 L \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2 L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3c_1 + c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix}$$

که c_1 و c_2 مختصات x نسبت به پایه مرتب T است. برای پیدا کردن c_1 و c_2 می نویسیم

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

که نتیجه می دهد $c_1 = x_2 - x_1$ و $c_2 = x_1$. پس

$$L(x) = \begin{bmatrix} 3(x_2 - x_1) + x_1 \\ (x_2 - x_1) + 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 2x_1 \\ x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

پس

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

که

$$\blacksquare A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه زیر در عین سادگی یک ویژگی مهم تبدیلات خطی را بیان می کند.

قضیه ۴-۱-۵ اگر $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد، آنگاه

$$L(\theta_V) = \theta_W$$

که θ_V و θ_W به ترتیب بردارهای صفر در V و W هستند.

اثبات:

$$\begin{aligned} L(\theta_V) &= L(\theta_V + \theta_V) \\ &= L(\theta_V) + L(\theta_V) \end{aligned}$$

با استفاده از قاعده حذف (قضیه ۳-۱-۳) چون $L(\theta_V)$ عضو W است داریم

$$L(\theta_V) = \theta_W \quad \blacksquare$$

$$L: P_2 \rightarrow P_1 : L(f) = f' \rightarrow \ker L = \{f \in P_2 : f' = 0\} = \{f \in P_1\} \\ \hookrightarrow L(1) = 0 \quad = \text{span}\{1\} \\ \text{تبدیلات خطی} \quad L(c) = 0 \quad \dim \ker L = 1$$

۲-۵ هسته یک تبدیل خطی

طبق قضیه ۵-۱-۴ می دانیم که بردار صفر دامنه تحت هر تبدیل خطی به بردار صفر مجموعه انجام نگاشته می شود. ولی در حالت کلی بردارهای دیگر از دامنه نیز ممکن است وجود داشته باشند که به بردار صفر مجموعه انجام نگاشته می شوند.

$$\ker L = \{v \in V : L(v) = 0_W\}$$

تعریف ۵-۲-۱ هسته یک تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ مجموعه کلیه بردارهای V هستند که به θ_W نگاشته می شوند و آن را با $\ker L$ نشان می دهیم. هسته L را فضای پوچی L نیز می نامند.

قضیه ۵-۱-۴ نشان می دهد که هسته یک تبدیل خطی هیچگاه تهی نیست، چون همواره داریم

$$\theta_V \in \ker L$$

از طرفی در تبدیل خطی مثال ۵-۱-۲ همه اعضای R^3 را که به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ ، $c \in R$ ، هستند، یعنی دو درایه اولشان صفر است به بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در R^2 ، که بردار صفر مجموعه انجام است می نگارد، پس هسته یک تبدیل خطی می تواند بیش از یک عضو داشته باشد.

قضیه ۵-۲-۱ هسته هر تبدیل خطی یک زیرفضای دامنه آن است. اثبات: فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد و $x, y \in \ker L$ یعنی

$$L(x) = L(y) = \theta_W$$

می توان نوشت

$$L(x+y) = L(x) + L(y) = \theta_W + \theta_W = \theta_W$$

یعنی $x + y \in \ker L$ اگر $c \in R$ داریم

$$L(cx) = cL(x) = c\theta_W = \theta_W$$

یعنی $cx \in \ker L$ پس $\ker L$ یک زیرفضای V است (قضیه ۳-۱-۸). ■

مثالهای زیر نحوه تعیین هسته یک تبدیل خطی را نشان می دهند.

مثال ۵-۲-۱ فرض کنید $L: R^3 \rightarrow R^2$ به صورت $L(x) = L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \forall x \in R^3$ باشد. آنگاه بدیهی است که

$$\ker L = \left\{ x \in R^3 \mid x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, c \in R \right\} = \text{محور } z$$

چون کلیه اعضای $\ker L$ مضربی از بردار $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ هستند، هسته تبدیل یک زیرفضای یک بعدی از R^3 است. ■

مثال ۵-۲-۲ فرض کنید $L: R^3 \rightarrow R^2$ یک تبدیل خطی به صورت

$$L(x) = L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}, \forall x \in R^3$$

باشد. برای تعیین هسته تبدیل می نویسیم

$$L(x) = 0_2$$

یا

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که معادل است با دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

که دارای بینهایت جواب است و اگر مقدار x_3 را برابر t بگیریم داریم

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}$$

پس

$$\ker L = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{sp} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

بدیهی است که بُعد هسته L برابر ۱ است. ■

مثال ۵-۲-۳ فرض کنید $L : P_2 \rightarrow R$ یک تبدیل خطی (یک تابع خطی) به صورت

$$L(f) = \int_0^1 f(t) dt, \quad \forall f \in P_2$$

باشد. برای پیدا کردن هسته L فرض کنید $f(t) = at^2 + bt + c$ که a, b و c اعداد

حقیقی هستند، یک عضو P_2 باشد. می نویسیم

$$L(f) = \int_0^1 (at^2 + bt + c) \cdot dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

f متعلق به $\ker L$ است اگر و تنها اگر

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

یعنی اگر و تنها اگر

$$c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$$

پس

$$\ker L = \left\{ f \in P_2 \mid f(t) = at^2 + bt - \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right), a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

برای تعیین بُعد هسته L آنرا به صورت

$$\ker L = \left\{ f \in P_2 \mid f(t) = a(t^2 - \frac{1}{3}) + b(t - \frac{1}{2}), a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

می نویسیم. چون $T = \left\{ (t^2 - \frac{1}{3}), (t - \frac{1}{2}) \right\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی دو عضوی

از P_2 است (چرا؟)، نتیجه می گیریم که بُعد هسته L برابر ۲ است. ■

$$c_1(t^2 - \frac{1}{3}) + c_2(t - \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow c_1 t^2 + c_2 t + (-\frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{2}) = 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

بازار t^2 و t و 1

$$c_1 = c_2 = 0, \quad -\frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{2} = 0 \leftarrow T \text{ متقل حفره}$$

چون یک تبدیل خطی در واقع یک تابع است، هر تبدیل خطی را که در تعریف

۳-۶-۲ صدق کند، یک تبدیل خطی یک به یک می نامیم، یعنی تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ را یک به یک می نامیم، اگر به ازای هر $x, y \in V$ رابطه $L(x) = L(y)$ تساوی $x = y$ را نتیجه دهد.

مثال ۵-۲-۴ تبدیل خطی $L: R^2 \rightarrow R^3$ به صورت

$$L(x) = L \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in R^2$$

یک تبدیل یک به یک است زیرا تساوی $L(x) = L(y)$ معادل است با

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 3y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

که دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \\ 3x_1 + x_2 = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

را نتیجه می دهد که ماتریس افزوده آن عبارت است از

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 + y_2 \\ 1 & -1 & y_1 - y_2 \\ 3 & 1 & 3y_1 + y_2 \end{array} \right]$$

که شکل پلکانی سطری آن به صورت

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \leftarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = y_1$

است که جواب یکتای $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$ دارد. یعنی از تساوی $L(x) = L(y)$ تساوی

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 3y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 3y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 3y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ $x = y$ را نتیجه می‌گیریم و در نتیجه تبدیل مورد بحث یک به یک است.

مثال ۵-۲-۵ تبدیل خطی $L: R^3 \rightarrow R^3$ به صورت

$$L(x) = L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in R^3$$

یک به یک نیست. چون تساوی

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

به دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1 - x_3 = y_1 - y_3 \\ x_2 + x_3 = y_2 + y_3 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 + y_2 \\ 1 & 0 & -1 & y_1 - y_3 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 + y_3 \end{array} \right]$$

منجر می‌شود که ماتریس افزوده آن به شکل پلکانی سطری به صورت زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = y_1 + y_2 \\ a_2 + a_3 = y_2 + y_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

چون ستون سوم آن دارای درایه پیشرو نیست (تذکر متعاقب مثال ۲-۲-۲) دستگاه جواب یکتا ندارد و نمی‌توان از تساوی $L(x) = L(y)$ لزوماً نتیجه گرفت که $x = y$ ، و در

نتیجه تبدیل مورد بحث یک به یک نیست. ■ $\rightarrow \begin{cases} a_2 = t \\ \begin{bmatrix} y_1 + y_2 - t \\ t \\ y_2 + y_3 - t \end{bmatrix}; t \in R \end{cases}$

قضیه زیر نشان می‌دهد که یک به یک بودن یا نبودن یک تبدیل خطی را می‌توان

توسط هسته آن مشخص کرد.

قضیه ۲-۲-۵ فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی است، آنگاه L یک به یک است

اگر و تنها اگر $\ker L = \{0_V\}$.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $\ker L = \{\theta_V\}$ ، آنگاه از تساوی $L(x) = L(y)$ نتیجه می‌گیریم

که معادل است با

$$L(x) - L(y) = \theta_W$$

$$L(x - y) = \theta_W$$

یعنی

$$x - y \in \ker L$$

یا

$$x - y = \theta_V$$

که معادل است با $x = y$.

(لزوم) فرض کنید L یک به یک است، آنگاه اگر $x \in \ker L$ داریم

$$L(x) = \theta_W$$

چون در هر تبدیل خطی داریم $L(\theta_V) = \theta_W$ ، از یک به یک بودن L نتیجه می‌گیریم که $x = \theta_V$ و اثبات کامل است. ■

مثال ۵-۲-۶ با استفاده از قضیه فوق یک به یک بودن تبدیل خطی مثال ۵-۲-۴ را می‌توان با حل معادله $L(x) = \theta_W$ یعنی حل

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی حل دستگاه همگن

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

نشان داد. ماتریس افزوده این دستگاه پس از تبدیل به شکل پلکانی به صورت

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$$

است که جواب یکتای $x_1 = x_2 = 0$ دارد. (چرا؟) و در نتیجه $\ker L = \{0_V\}$ و نتیجه حاصل است. تبدیل خطی مثال ۵-۲-۵ را نیز به روش مشابه می توان نشان داد که یک به یک نیست. ■

این بخش را با بیان و اثبات قضیه زیر به پایان می بریم.

قضیه ۵-۲-۳ فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه L یک به یک است اگر و تنها اگر نگاره هر زیرمجموعه مستقل خطی از V یک زیرمجموعه مستقل خطی از W باشد.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه برای V و $x, y \in V$ باشد. در این صورت به طور یکتا می توان نوشت

$$x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n$$

$$y = b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n$$

پس از تساوی $L(x) = L(y)$ نتیجه می گیریم

$$a_1 L(\alpha_1) + \dots + a_n L(\alpha_n) = b_1 L(\alpha_1) + \dots + b_n L(\alpha_n)$$

یا

$$(a_1 - b_1)L(\alpha_1) + \dots + (a_n - b_n)L(\alpha_n) = \theta_W$$

اما از فرض کفایت نتیجه می گیریم که $S = \{L(\alpha_1), \dots, L(\alpha_n)\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از W است. پس داریم $a_i = b_i$ و $i = 1, \dots, n$ ، یعنی $x = y$. در نتیجه L یک به یک است.

(لزوم) فرض کنید L یک به یک است و $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از V است می نویسیم

$$a_1 L(x_1) + \dots + a_k L(x_k) = \theta_W$$

یعنی

$$L(a_1x_1 + \dots + a_kx_k) = \theta_W$$

یعنی

$$a_1x_1 + \dots + a_kx_k \in \ker L$$

چون L طبق فرض لزوم یک به یک است نتیجه می‌گیریم که

$$a_1x_1 + \dots + a_kx_k = \theta_V$$

و از استقلال X نتیجه می‌گیریم که $a_1 = \dots = a_k = 0$. یعنی مجموعه

$$Z = \{L(x_1), \dots, L(x_k)\}$$

مستقل خطی است. ■

۳-۵ برد یک تبدیل خطی

گرچه در یک تبدیل خطی L از V به W همه اعضای V شرکت می‌کنند، یعنی دامنه تبدیل تمام V را دربر می‌گیرد، ولی ممکن است مجموعه نگاره‌های اعضای V ، تمام W را دربر نگیرد. در نتیجه تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳-۵-۱ فرض کنید $L: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی است، آنگاه برد L ، که آنرا با $\text{ran}L$ نشان می‌دهیم، عبارت است از مجموعه اعضای W که نگاره عضوی از V تحت L هستند، یعنی

$$\text{ran}L = \{u \in W \mid \exists x \in V \text{ s.t. } L(x) = u\}$$

یا

$$\text{ran}L = \{L(x) \mid x \in V\}$$

قضیه ۳-۵-۱ برد هر تبدیل خطی یک زیرفضای مجموعه انجام است.

اثبات: تبدیل خطی $L: V \rightarrow W$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $a, b \in R$, $u, v \in \text{ran}L$ پس وجود دارد $x, y \in V$ طوری که

$$L(x) = u, \quad L(y) = v$$

می‌توان نوشت

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y) = au + bv$$

پس $au + bv \in \text{ran}L$ و اثبات (طبق قضیه ۳-۵-۱) کامل است. ■