

به طریق مشابه ثابت می‌کنیم $a_1 = \dots = a_k = 0$ و حکم ثابت است. ■
قضیه زیر یک نامساوی معروف را بیان می‌کند.

قضیه ۳-۲-۴ (نامساوی کوشی - شوارتز) اگر V یک فضای اقلیدسی باشد، آنگاه

$$x \cdot y \leq |x| |y|, \quad \forall x, y \in V$$

اثبات: فرض کنید t یک عدد حقیقی و $z = tx + y$. آنگاه با توجه به ویژگی اول ضرب داخلی و قضیه ۱-۲-۴ می‌توان نوشت $z \cdot z \geq 0$. یعنی

$$(tx + y) \cdot (tx + y) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

یا به طور معادل

$$t^2(x \cdot x) + 2t(x \cdot y) + (y \cdot y) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

سمت چپ نامساوی فوق یک چندجمله‌ای درجه ۲ بر حسب t است. از جبر دیفرانسیل به خاطر داریم که شرط لازم و کافی برای اینکه یک چندجمله‌ای درجه دو که ضریب جمله درجه دوم آن مثبت است همواره نامنفی باشد، این است که دلتای آن نامثبت باشد. پس اگر $x \neq \theta$ (یعنی اگر $x \cdot x > 0$) نامساوی فوق به ازای همه مقادیر t برقرار است اگر و تنها اگر

$$\Delta = (x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0$$

یا

$$(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$$

که چون $|x|$ و $|y|$ نامنفی هستند، نتیجه می‌شود

$$x \cdot y \leq |x| |y|$$

✓ اگر $x = \theta$ باشد، بدیهی است که نامساوی (به صورت تساوی) برقرار است. ■

قضیه ۴-۲-۴ (نامساوی مثلثی) اگر x و y دو عضو یک فضای اقلیدسی باشند، داریم

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

اثبات: می‌نویسیم

$$|x+y|^2 = (x+y) \cdot (x+y)$$

$$= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y$$

با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز

$$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$= (|x| + |y|)^2$$

چون $(|x| + |y|)$ نامنفی است داریم

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \blacksquare$$

قضیه زیر به ما امکان می‌دهد که بر روی یک فضای اقلیدسی مفهوم فاصله را تعریف کنیم.

$$d(x, y) = |x - y|$$

قضیه ۴-۲-۵ فرض کنید x, y و z بردارهای یک فضای اقلیدسی باشند، آنگاه

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \quad \rightarrow d(x, y) \quad \text{کد متر است}$$

$$|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| \quad \text{در فضای } V$$

اثبات: با استفاده از قضیه ۴-۲-۴ ساده است. (تمرین)

تعریف ۴-۲-۴ اگر x و y اعضای یک فضای اقلیدسی باشند، فاصله بین x و y که با $d(x, y)$ نشان می‌دهیم عبارت است از $|x - y|$.

می‌دانیم که یک مجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر، مستقل خطی نیز هست (قضیه ۴-۲-۲) پس یک مجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر، یک پایه برای گستره خود است.

از قضیه زیر نتیجه خواهیم گرفت که پیدا کردن بردار مختصات یک بردار نسبت به یک پایه متعامد یگه بسیار آسان است.

قضیه ۴-۲-۶ فرض کنید $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یگه برای فضای اقلیدسی

V_n باشد، آنگاه به ازای هر عضو x از V_n داریم

$$x = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$$

که

$$c_i = x \cdot \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

و در نتیجه

$$[x]_T = \begin{bmatrix} x \cdot \alpha_1 \\ \vdots \\ x \cdot \alpha_n \end{bmatrix}.$$

اثبات: چون T یک پایه برای V_n است، (به طور یکتا) می توان نوشت

$$x = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$$

که $c_1, \dots, c_n$ اعداد حقیقی هستند. اگر طرفین رابطه فوق را در α_i ضرب داخلی کنیم داریم

$$x \cdot \alpha_i = c_1 (\alpha_1 \cdot \alpha_i) + \dots + c_n (\alpha_n \cdot \alpha_i)$$

$$= c_i (\alpha_i \cdot \alpha_i)$$

$$= c_i$$

چون T متعامد یگانه است

حال فرض کنید $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ یک پایه متعامد یگانه مرتب برای فضای

اقلیدسی V_n باشد، آنگاه از قضیه فوق نتیجه می شود که

$$[x]_T = \begin{bmatrix} x \cdot \alpha_1 \\ \vdots \\ x \cdot \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \forall x \in V_n \quad \blacksquare$$

چون محاسبه حاصلضرب داخلی دوبردار معمولاً ساده است، پیدا کردن بردار

مختصات یک بردار نسبت به یک پایه متعامد یگانه کار آسانی است.

قضیه زیر بر اهمیت پایه های متعامد یگانه می افزاید.

قضیه ۴-۲-۷ اگر $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب متعامد یگانه برای یک فضای

اقلیدسی و x و y دوبردار در این فضا باشند داریم

$$x \cdot y = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = a' \cdot b$$

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, y = \sum_{j=1}^n b_j \alpha_j$$

$$\rightarrow x \cdot y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \alpha_i \cdot \alpha_j = \sum_{i=1}^n a_i b_i = [x]_T \cdot [y]_T$$

۱۲۸ جبر خطی برای آمار

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

↗

که a و b به ترتیب بردارهای مختصات x و y نسبت به T هستند، یعنی

$$a = [x]_T, \quad b = [y]_T$$

اثبات: تمرین (راهنمایی: از ماتریس ضرب داخلی استفاده کنید). ■

۳-۴ فرآیند گرام - اشمیت

فرض کنید $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ یک پایه برای زیرفضای W از یک فضای اقلیدسی باشد. مجموعه $T' = [\beta_1, \dots, \beta_k]$ را به طریق زیر می‌سازیم.

β_1 را برابر α_1 می‌گیریم یعنی $\beta_1 = \alpha_1$. آنگاه برای ساختن β_2 دنبال یک ترکیب خطی از α_1 و α_2 می‌گردیم که بر β_1 عمود باشد.

$$\beta_2 = a_1 \beta_1 + a_2 \alpha_2$$

$$\beta_2 \cdot \beta_1 = (a_1 \beta_1 + a_2 \alpha_2) \cdot \beta_1 = a_1 (\beta_1 \cdot \beta_1) + a_2 (\alpha_2 \cdot \beta_1)$$

$$= 0$$

چون $\beta_1 \neq 0$ داریم

$$a_1 = -a_2 \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}$$

که اگر a_2 را برابر واحد بگیریم داریم $a_1 = -\frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}$ و در نتیجه

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1$$

حال برای ساختن β_3 دنبال یک ترکیب خطی از β_1 و β_2 و α_3 می‌گردیم که بر β_1 و β_2 عمود باشد.

$$\beta_3 = b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \alpha_3$$

$$\beta_3 \cdot \beta_1 = b_1 (\beta_1 \cdot \beta_1) + b_2 (\beta_2 \cdot \beta_1) + b_3 (\alpha_3 \cdot \beta_1) = 0$$

$$\beta_3 \cdot \beta_2 = b_1 (\beta_1 \cdot \beta_2) + b_2 (\beta_2 \cdot \beta_2) + b_3 (\alpha_3 \cdot \beta_2) = 0$$

اگر b_3 را برابر واحد بگیریم با توجه به متعامد بودن β_1 و β_2 داریم

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = 0 \rightarrow \begin{aligned} b_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + (\alpha_3 \cdot \beta_1) &= 0 \\ b_2(\beta_2 \cdot \beta_2) + (\alpha_3 \cdot \beta_2) &= 0 \end{aligned}$$

که چون $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ (چرا؟) داریم

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \\ b_2 &= -\frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2} \end{aligned}$$

$B_1 = \alpha_1 \neq 0$
 $B_2 = 0 \Rightarrow$ راجع به α_2
 یعنی

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2} \beta_2$$

به همین روش β_4 را به صورت

$$\beta_4 = \alpha_4 - \frac{\alpha_4 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_4 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2} \beta_2 - \frac{\alpha_4 \cdot \beta_3}{\beta_3 \cdot \beta_3} \beta_3$$

و نهایتاً β_k را به صورت

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{\alpha_k \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \beta_1 - \dots - \frac{\alpha_k \cdot \beta_{k-1}}{\beta_{k-1} \cdot \beta_{k-1}} \beta_{k-1}$$

به دست می آوریم.

نحوه ساختن مجموعه فوق (که فرایند گرام - اشمیت نام دارد) اثباتی است بر اینکه T' یک مجموعه متعامد است. از طرفی از قضیه ۲-۲-۴ نتیجه می گیریم که T' مستقل خطی است. چون T مستقل خطی است و می دانیم که هر مجموعه مستقل خطی دارای k بردار یک پایه برای گستره خود است، نتیجه می گیریم که T' نیز یک پایه برای گستره T است، پس قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه ۳-۱-۴ اگر T یک پایه برای زیرفضای W از یک فضای اقلیدسی و T' مجموعه ای متعامد باشد که از T به روش گرام - اشمیت به دست آمده است، آنگاه T' یک پایه متعامد برای T است. ■

$$\hookrightarrow T' = \left\{ \frac{B_1}{|B_1|}, \dots, \frac{B_k}{|B_k|} \right\}$$

که پایه متعامد برای T است.

مثال ۴-۳-۱ مجموعه $T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ که $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

یک پایه برای R^3 است. به روش گرام - اشمیت از T یک پایه متعامد می سازیم. قرار می دهیم

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \left(\frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \right) \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$- \left(\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \left(\frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \right) \beta_1 - \left(\frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2} \right) \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$- \left(\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{1}{19} \end{bmatrix}$$

پس مجموعه $T' = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ ، یک پایه متعامد برای R^3 است.

بدیهی است که مجموعه $T'' = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ که $\gamma_i = \frac{1}{|\beta_i|} \beta_i$ $i=1, 2, 3$ یک

پایه متعامد یکه برای R^3 خواهد بود. ■

مثال ۲-۳-۴ فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2]$ که $\alpha_1 = 3t - 1$ و $\alpha_2 = 3t + 1$ یک پایه متعامد یکه برای P_1 بر اساس حاصلضرب داخلی $f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t) \cdot dt$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\beta_1 = \alpha_1 = 3t - 1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \left(\frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1} \right) \beta_1$$

$$= (3t + 1) - \frac{\int_0^1 (3t - 1)(3t + 1) \cdot dt}{\int_0^1 (3t - 1)^2 \cdot dt} (3t - 1) = (3t + 1) - \frac{1}{3} (3t - 1) = -3t + 3$$

پس $T' = \{3t - 1, -3t + 3\}$ یک پایه متعامد برای P_1 است. حال اگر

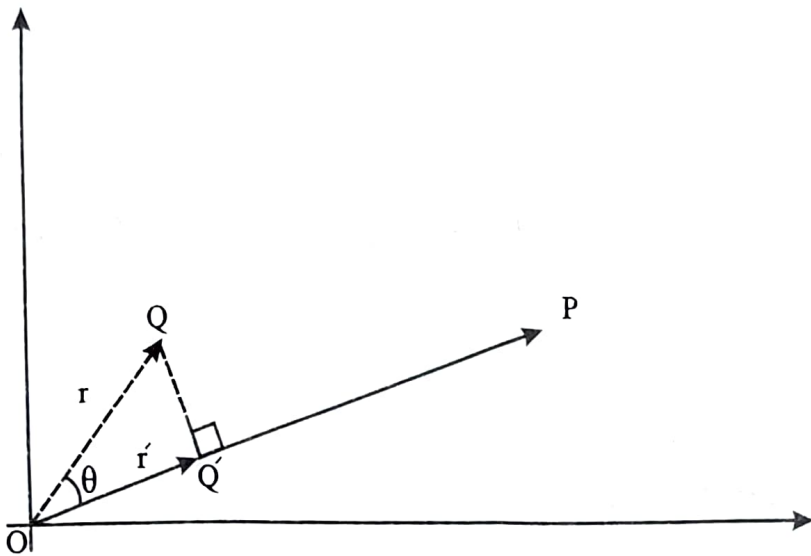
$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \frac{1}{1} \beta_1 = 3t - 1$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 (-3t + 3)^2 dt}} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (-3t + 3) = -\sqrt{3}t + \sqrt{3}$$

آنگاه $T'' = [\gamma_1, \gamma_2]$ یک پایه متعامد یکه برای P_1 است. ■

۴-۴ تصویر یک بردار

اگر به بردارهای شکل ۴-۱-۱ یک بار دیگر در شکل ۴-۴-۱ توجه کنیم ملاحظه می شود که تصویر هندسی بردار q بر بردار p برداری است همجهت با p که انتهای آن پای عمودی است که از نقطه Q بر امتداد OP وارد می شود.



شکل ۱-۴-۴

در شکل ۱-۴-۴ می توان نوشت

$$\overline{OQ'} = \overline{OQ} \cos \theta$$

که از روابط (۲-۱-۴) و (۳-۱-۴) داریم

$$\overline{OQ'} = \sqrt{q \cdot q} \times \frac{p \cdot q}{\sqrt{(p \cdot p)(q \cdot q)}} = c \sqrt{p \cdot p} \quad (۱-۴-۴)$$

چون تصویر q بر p ، که آن را با بردار q' نشان می دهیم، در واقع ضربی از بردار p مانند cp است، داریم

$$|q'| = c |p|$$

یا

$$\overline{OQ'} = c \sqrt{p \cdot p}$$

از تساوی اخیر و رابطه (۱-۴-۴) نتیجه می شود که $c = \frac{p \cdot q}{p \cdot p}$ و در نتیجه

$$q' = \left(\frac{p \cdot q}{p \cdot p} \right) p$$

تعریف زیر را با الهام از رابطه فوق داریم.

تعریف ۱-۴-۴ فرض کنید x و y اعضای یک فضای اقلیدسی باشند آنگاه بردار

$$\left(\frac{x \cdot y}{x \cdot x} \right) x$$

(راکه مضربی از بردار x است) تصویر y بر x می‌نامیم.

با توجه به تعریف فوق β_i ها را بر حسب α_i ها در فرآیند گرام - اشمیت می‌توان به

صورت زیر نوشت

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - (\beta_1 \text{ بر } \alpha_2 \text{ تصویر})$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - (\beta_1 \text{ بر } \alpha_3 \text{ تصویر}) - (\beta_2 \text{ بر } \alpha_3 \text{ تصویر})$$

⋮

$$\beta_k = \alpha_k - (\beta_1 \text{ بر } \alpha_k \text{ تصویر}) - \dots - (\beta_{k-1} \text{ بر } \alpha_k \text{ تصویر}).$$

قضیه زیر تعبیر هندسی تصویر یک بردار بر بردار دیگر را تأیید می‌کند.

قضیه ۴-۴-۱ در یک فضای اقلیدسی تصویر بردار y بر بردار x مضربی از x مانند $c \cdot x$

است طوری که $d(y, cx) = 0$ به ازای $c = c$ می‌نیم است.

اثبات: تمرین ■ $d^2 = (y - cx) \cdot (y - cx) = y \cdot y - 2c(y \cdot x) + c^2(x \cdot x)$

دایره $\frac{d^2}{dc} = 0 \Leftrightarrow -2(y \cdot x) + 2c(x \cdot x) = 0 \Rightarrow c = \frac{y \cdot x}{x \cdot x}$

با الهام از قضیه فوق تصویر یک بردار از یک فضای اقلیدسی را بر یک زیرفضا تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴-۴-۲ فرض کنید V یک فضای اقلیدسی، x یک بردار در آن و W یک

زیرفضای V باشد. آنگاه تصویر x بر W ، که آنرا با $\text{prj}_W x$ نشان می‌دهیم، عضوی از W

است که فاصله اش از x می‌نیم باشد.

قضیه زیر ضمن اینکه ثابت می‌کند که در واقع چنین می‌نیم وجود دارد، نحوه

پیدا کردن تصویر x بر W را نیز نشان می‌دهد.

قضیه ۴-۴-۲ فرض کنید $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ یک پایه متعامد یکه برای زیرفضای W از

فضای اقلیدسی V و x عضوی از V باشد آنگاه

$$\text{prj}_W x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_k \alpha_k$$

$$a_i = x \cdot \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k$$

که

اثبات: فرض کنید $z = c_1 \alpha_1 + \dots + c_k \alpha_k$ عضو W باشد. چون

$$d(z, x) = \|z - x\|$$

سعی می‌کنیم $c_1, \dots, c_k$ را طوری تعیین کنیم که $\|z - x\|^2$ می‌نیم شود. اما

$$\|z - x\|^2 = (z - x) \cdot (z - x)$$

$$= \|z\|^2 - 2(x \cdot z) + \|x\|^2$$

با توجه به قضیه ۴-۲-۷

$$= \sum_{i=1}^k c_i^2 - 2(x \cdot \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i) + \|x\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^k c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (x \cdot \alpha_i) + \|x\|^2 + \sum_{i=1}^k a_i^2 - \sum_{i=1}^k a_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^k (c_i - a_i)^2 - \sum_{i=1}^k a_i^2 + \|x\|^2$$

که چون $\|x\|^2$ و $\sum_{i=1}^k a_i^2$ به $c_1, \dots, c_k$ بستگی ندارند، می‌نیم $d(z, x)$ وقتی حاصل می‌شود که

$$c_i = a_i, \quad i = 1, \dots, k$$

■ واثبات کامل است.

پس تصویر بردار x بر زیرفضای W برابر است با

$$\text{prj}_W x = (x \cdot \alpha_1) \alpha_1 + \dots + (x \cdot \alpha_k) \alpha_k$$

که $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ اعضای یک پایه متعامد یگه برای W هستند.

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{5}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{5}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{5}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۴-۴-۱ با توجه به اینکه مجموعه $T = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ با

یک پایه متعامد یگه برای زیرفضای

$T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد برای W

$$\hookrightarrow \text{prj}_W u = \sum_{i=1}^n (u \cdot \alpha_i) \alpha_i, \quad z \in W \rightsquigarrow z = \sum_{j=1}^n b_j \alpha_j$$

$$y \cdot z = u \cdot z - (\text{prj}_W u) \cdot z = \sum_j b_j (u \cdot \alpha_j) - \sum_i \sum_j (u \cdot \alpha_i) b_j \alpha_i \cdot \alpha_j =$$

$$(i=j) \quad W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

از $\mathbb{R}^3$ است، تصویر بردار $y = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ متعلق به $\mathbb{R}^3$ بر W عبارت است از

$$\text{prj}_W y = 15\alpha_1 + 20\alpha_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

زیرا

$$y \cdot \alpha_1 = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 15$$

$$y \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = 20$$

■

قضیه ۴-۴-۳ فرض کنید V فضای اقلیدسی و W یک زیرفضای آن و x عضوی از V باشد، آنگاه بردار $y = x - \text{prj}_W x$ بر همه اعضای W عمود است. اثبات: تمرین (توجه کنید که بردار صفر بر همه بردارها عمود است).

تعریف ۴-۴-۳ فرض کنید V فضای اقلیدسی و W یک زیرفضای آن باشد. آنگاه مجموعه بردارهای V را که بر هر یک از بردارهای W عمود هستند متمم متعامد W نامیده و با $W^\perp$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴-۴-۴ (قضیه تجزیه بردار) فرض کنید V فضای اقلیدسی و W یک زیرفضای آن باشد آنگاه به ازای هر $x \in V$ دو بردار یکتای $\alpha \in W$ و $\beta \in W^\perp$ وجود دارند طوری که $x = \alpha + \beta$.

اثبات: فرض کنید $\alpha = \text{prj}_W x$ و $\beta = x - \text{prj}_W x$ ، بدیهی است که $\alpha \in W$ و با توجه به

قضیه ۴-۴-۳، $\beta \in W^\perp$ و $x = \alpha + \beta$

برای اثبات یکتایی α و β فرض کنید $\alpha' \in W$ و $\beta' \in W^\perp$ وجود داشته باشند
طوری که

$$x = \alpha' + \beta'$$

پس می توان نوشت

$$(\alpha' + \beta') - (\alpha + \beta) = \theta$$

یا

$$(\alpha' - \alpha) + (\beta' - \beta) = \theta$$

با ضرب داخلی طرفین رابطه فوق در $(\alpha' - \alpha)$ و با توجه به اینکه $(\alpha' - \alpha)$ و $(\beta' - \beta)$ متعامد هستند نتیجه می شود

$$(\alpha' - \alpha) \cdot (\alpha' - \alpha) = 0$$

یعنی $\alpha' = \alpha$. به طریق مشابه ثابت می شود $\beta' = \beta$ و اثبات کامل است. ■

خودآزمایی

۴-۱ آیا تصویر بردار x بر بردار y همواره ضربی از بردار y است؟۴-۲ آیا دو بردار x و y مستقل خطی اند اگر و تنها اگر متعامد باشند؟۴-۳ آیا اگر X مجموعه سطرهای یک ماتریس متعامد باشد، آنگاه لزوماً X یک

مجموعه متعامد است؟ (تعریف ۷-۳-۱ را ببینید.)

۴-۴ آیا اگر S یک زیر مجموعه متناهی از فضای اقلیدسی V باشد، آنگاه $S^\perp$ نیز

متناهی است؟

۴-۵ آیا اگر V یک فضای اقلیدسی و W یک زیر فضای آن باشد، آنگاه $W \cup W^\perp = V$ ؟۴-۶ آیا اگر x یک بردار و W یک زیر فضایی فضای اقلیدسی V باشد، آنگاه تصویر x بر W بر همه اعضای W عمود است؟۴-۷ آیا اگر x و y دو بردار متعامد باشند، آنگاه لزوماً تصویر y بر x برابر θ (عضو

خنثی) است؟

۴-۸ آیا هر ضرب داخلی تابعی حقیقی است که بر حاصلضرب دکارتی یک فضای

بررداری در خودش تعریف شده است؟