

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\sqrt{(x \cdot x)(y \cdot y)}} = \frac{x' y}{\sqrt{(x' x)(y' y)}} \quad (4-1-5)$$

تعریف می‌کنیم. ضمناً چون کوسینوس زاویه 90° برابر صفر است، دوبردار را در R^n متعامد (عمود بر هم) می‌نامیم اگر حاصل ضرب داخلی آنها صفر باشد.

در جهت ارائه یک تعریف کلی برای ضرب داخلی بردارها در فضاهای برداری مجرد، ملاحظه می‌کنیم که ضرب داخلی در R^n دارای ویژگیهای چهارگانه زیر است (تمرین)

$$i) x \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$ii) x \cdot y = y \cdot x \quad (4-1-6)$$

$$iii) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$iv) (cx) \cdot y = c(x \cdot y), \quad \forall c \in R$$

پس مفهوم ضرب داخلی دوبردار را به صورت زیر به یک فضای برداری عمومی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۴-۱-۲ فرض کنید V یک فضای برداری است. حاصلضرب داخلی بر V تابعی است که به هر زوج x و y از اعضای V یک عدد حقیقی $x \cdot y$ نسبت می‌دهد که در ویژگیهای چهارگانه (۴-۱-۶) صدق کند.

مسلماً تعریف ۴-۱-۱ برای ضرب داخلی در R^n با تعریف کلی فوق سازگار است ولی تنها ضرب داخلی قابل تعریف بر R^n نیست. مثال زیر این مطلب را تأیید می‌کند.

مثال ۴-۱-۱ تحقیق می‌کنیم که ضرب داخلی در R^2 تعریف شده به صورت

$$x \cdot y = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2, \quad \forall x, y \in R^2$$

در ویژگیهای چهارگانه (۴-۱-۶) صدق می‌کند.

$$x \cdot x = x_1 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 2x_2 x_2 \quad (i)$$

$$= x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

ویژگی (ii) بدیهی است و ویژگیهای (iii) و (iv) به راحتی تحقیق می‌شوند. ■

در واقع انواع حاصلضرب داخلی که می‌توان بر R^2 (یا R^3) تعریف کرد، بی‌شمار است. در این میان حاصل ضرب داخلی مذکور در تعریف (۴-۱-۱) را حاصلضرب داخلی متعارف بر R^n می‌نامیم.

مثال ۴-۱-۲ پایه مرتب $T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ با $\alpha_1 = t^2, \alpha_2 = t, \alpha_3 = 1$ را برای فضای برداری P_2 در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب داخلی بین دو عضو f و g از P_2 را به صورت

$$f \cdot g = [f]_T \cdot [g]_T$$

تعریف می‌کنیم، که ضرب داخلی سمت راست ضرب داخلی متعارف بر R^n است. چون $[f]$ و $[g]$ به ترتیب بردارهای مختصات f و g و هر دو متعلق به R^3 هستند، ضرب داخلی فوق دارای ویژگیهای چهارگانه (۴-۱-۶) می‌باشد. مثلاً اگر

$$f(t) = 3t^2 - t + 1, \quad g(t) = 2t - 3$$

آنگاه

$$f \cdot g = [f]_T \cdot [g]_T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -5 \quad \blacksquare$$

در مثال فوق برای تعریف ضرب داخلی بر P_2 در واقع از ضرب داخلی متعارف در R^3 استفاده کرده‌ایم.

به‌طور کلی اگر V یک فضای برداری و T یک پایه مرتب برای آن باشد، یک ضرب داخلی بر V به صورت

$$x \cdot y = [x]_T \cdot [y]_T, \quad \forall x, y \in V$$

قابل تعریف است.

مثال ۴-۱-۳ اگر f و g دو عضو از P_2 باشد، ضرب داخلی دیگری به صورت

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \cdot dt$$

بر P_2 تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که دارای ویژگیهای چهارگانه لازم هست.

$$f \cdot f = \int_0^1 [f(t)]^2 \cdot dt > 0 \quad \forall f \neq 0 \quad (i)$$

$\int_0^1 g(t) dt = 0$
 به شرط اینکه g و مشتق آن در 0 و 1 صفر باشند
 $g(t) = 0, \forall t$

(ii) برقرار بودن ویژگی جابجایی بدیهی است.

(iii) فرض کنید h عضو دیگری از P_T است. داریم

$$\begin{aligned} f \cdot (g+h) &= \int_0^1 f(t)[g(t)+h(t)]dt \\ &= \int_0^1 f(t)g(t) \cdot dt + \int_0^1 f(t) \cdot h(t) \cdot dt \\ &= f \cdot g + f \cdot h \end{aligned}$$

(iv) فرض کنید c یک عدد حقیقی است، می توان نوشت

$$\begin{aligned} (cf) \cdot g &= \int_0^1 cf(t) \cdot g(t) \cdot dt \\ &= c \int_0^1 f(t)g(t) \cdot dt \\ &= c(f \cdot g) \end{aligned}$$

برای مثال اگر f و g دوچندجمله‌ای تعریف شده در مثال قبل باشند، داریم

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \int_0^1 (3t^2 - t + 1)(2t - 3)dt \\ &= \int_0^1 (6t^3 - 11t^2 + 5t - 3) \cdot dt \\ &= \left. \frac{6}{4}t^4 - \frac{11}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 3t \right|_0^1 = \frac{-8}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۲-۴ ماتریس ضرب داخلی و مجموعه‌های متعامد یگه

اینک نشان خواهیم داد که هرگونه ضرب داخلی تعریف شده بر یک فضای برداری با بعد متناهی برحسب هر پایه مفروض، کاملاً به وسیله یک ماتریس متقارن معین می‌شود.

ابتدا به لم زیر نیاز داریم

لم ۴-۲-۱ فرض کنید a و b دو عضو R^n و C یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه

$$a \cdot Cb = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i c_{ij} b_j$$

که ضرب داخلی سمت چپ، ضرب داخلی متعارف بر R^n است. اثبات:

$$Cb = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{nj} b_j \end{bmatrix}$$

$$a \cdot Cb = a \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{nj} b_j \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j c_{ij}$$

حال فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی باشد که بر آن یک ضرب داخلی تعریف شده است و $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب برای این فضا باشد. همچنین فرض کنید که $C = \{c_{ij}\}$ یک ماتریس $n \times n$ است که $c_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$ ، $j = 1, \dots, n$. با توجه به ویژگی جابجایی ضرب داخلی، C یک ماتریس متقارن است. اکنون فرض کنید x و y دو عضو این فضای برداری باشند. می توان نوشت

$$x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n, \quad y = b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n$$

که $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ، $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ به ترتیب بردارهای مختصات x و y نسبت به T هستند.

آنگاه با توجه به ویژگیهای ضرب داخلی می توان نوشت.

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \alpha_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \left[\alpha_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j \alpha_j \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{j=1}^n b_j (\alpha_i \cdot \alpha_j) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (\alpha_i \alpha_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j c_{ij} \\
 &= a \cdot Cb \\
 &= [x]_T \cdot C [y]_T
 \end{aligned}$$

با توجه به لم فوق

که ضرب داخلی سمت راست نهایی رابطه فوق ضرب داخلی متعارف بر R^n است. ملاحظه می شود که اگر پایه مرتب T را ثابت نگه داریم، هرگونه ضرب داخلی که بر V تعریف شود به وسیله یک ماتریس متقارن مانند C معین می شود. اگر تذکر متعاقب تعریف ۴-۱-۱ را در نظر داشته باشیم می توانیم بنویسیم

$$x \cdot y = [x]_T' C [y]_T$$

ماتریس C را ماتریس ضرب داخلی بر V نسبت به پایه مرتب T می نامیم. توجه کنید که چون به ازای هر عضو غیر صفر V مانند x داریم $x \cdot x > 0$ نتیجه می گیریم که

$$a' C a > 0 \quad \forall a \neq 0$$

ماتریس متقارنی را که در رابطه فوق صدق کند یک ماتریس مثبت معین می نامند. برعکس (به عنوان تمرین می توانید ثابت کنید که) اگر T یک پایه مرتب برای فضای برداری V و C یک ماتریس مثبت معین باشد، رابطه

$$x \cdot y = [x]_T' C [y]_T$$

یک ضرب داخلی بر V تعریف می‌کند.

مثال ۱-۲-۴ ماتریس ضرب داخلی P_T در مثال ۳-۱-۴ را نسبت به پایه مرتب T در مثال ۳-۱-۴ به دست می‌آوریم. داریم

$$c_{11} = \alpha_1 \cdot \alpha_1 = \int_0^1 t^4 \cdot dt = \frac{1}{5}$$

$$c_{12} = c_{21} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \int_0^1 t^3 \cdot dt = \frac{1}{4}$$

$$c_{13} = c_{31} = \alpha_1 \cdot \alpha_3 = \int_0^1 t^2 \cdot dt = \frac{1}{3}$$

$$c_{22} = \alpha_2 \cdot \alpha_2 = \int_0^1 t^2 \cdot dt = \frac{1}{3}$$

$$c_{23} = c_{32} = \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \int_0^1 t \cdot dt = \frac{1}{2}$$

$$c_{33} = \alpha_3 \cdot \alpha_3 = \int_0^1 1 \cdot dt = 1$$

پس

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

■

یک فضای برداری که به ضرب داخلی مجهز شده باشد نام خاصی دارد که در تعریف زیر مذکور است.

تعریف ۱-۲-۴ یک فضای برداری را که بر آن ضرب داخلی تعریف شده باشد یک فضای ضرب داخلی یا (اگر دارای بعد متناهی باشد) یک فضای اقلیدسی نامیم. قضیه زیر در هر فضای اقلیدسی صادق است.

قضیه ۱-۲-۴ اگر V یک فضای اقلیدسی و θ عضو صفر آن باشد آنگاه

$$\theta \cdot x = 0, \quad \forall x \in V$$

اثبات:

$$(-1)(\theta \cdot x) = ((-1)\theta) \cdot x = \theta \cdot x$$

چون عدد حقیقی $\theta \cdot x$ با قرینه خود برابر می باشد نتیجه حاصل است. ■

در فضاهاى اقلیدسى با توجه به روابط (۲-۱-۴) و (۳-۱-۴) برای هر بردار یک طول و بین هر دو بردار یک زاویه تعریف می شود.

تعریف ۲-۲-۴ فرض کنید V یک فضای اقلیدسى باشد آنگاه $\sqrt{x \cdot x}$ را طول بردار x نامیده و با $|x|$ نشان می دهیم. زاویه بین دو بردار x و y به صورت زاویه ای مانند θ بین 0 و π تعریف می شود که

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x| \times |y|} \quad (1-2-4)^*$$

اگر $\cos \theta = 0$ (یعنی اگر $x \cdot y = 0$) دو بردار x و y را متعامد (عمود بر هم) می نامیم.

مثال ۲-۲-۴ تحت ضرب داخلی تعریف شده در مثال ۳-۱-۴

$$f: f(t) = 5t^2 - 2, \quad g: g(t) = 3t - 3$$

داریم

$$|f| = \text{طول } f = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_0^1 (5t^2 - 2)^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$|g| = \text{طول } g = \sqrt{g \cdot g} = \sqrt{\int_0^1 (3t - 3)^2 \cdot dt} = \sqrt{3}$$

$$f \cdot g = \int_0^1 (5t^2 - 2)(3t - 3) dt = \frac{7}{4}$$

$$\text{کوسینوس زاویه بین } f, g = \frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{\frac{7}{3}} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

*. قضیه ۳-۲-۴ نشان می دهد که سمت راست رابطه (۱-۲-۴) به ازای هر x و y عددی بین ۱ و -۱ است و لذا می تواند به عنوان کوسینوس یک زاویه تعریف شود.

ضمناً در این فضای اقلیدسی دوبردار $g: g(t) = 3t - 3$ و $h: h(t) = 1 - 3t$ متعامدند زیرا

$$g \cdot h = \int_0^1 (3t - 3)(1 - 3t) dt = 0 \quad \blacksquare$$

مثال ۳-۲-۴ در فضای برداری R^3 با ضرب داخلی متعارف، اعضای پایه طبیعی R^3 یعنی

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

ضمناً طول هر یک از این بردارها برابر واحد است زیرا برای مثال

$$|\alpha_1| = \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_1} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

مثال ۴-۲-۴ تحت مفروضات مثال قبل بردارهای زیر نیز دوه برهم عمودند.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

زیرا

$$x \cdot y = x' y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

و به طریق مشابه داریم $\blacksquare \quad y \cdot z = 0, \quad x \cdot z = 0$

تعریف ۳-۲-۴ در یک فضای اقلیدسی مجموعه‌ای از بردارها را که دوه برهم عمودند یک مجموعه متعامد، برداری را که طول آن برابر یک است بردار یکه و مجموعه‌ای از بردارهای یکه را که دوه برهم عمود باشند یک مجموعه متعامد یکه می‌نامیم.

تذکر: توجه کنید که اگر x یک بردار در یک فضای اقلیدسی باشد آنگاه $y = \frac{1}{|x|} x$

یک بردار یکه است زیرا

$$|y|^2 = y \cdot y = \left(\frac{1}{|x|} x \right) \cdot \left(\frac{1}{|x|} x \right) = \frac{1}{|x|^2} (x \cdot x) = \frac{1}{|x|^2} |x|^2 = 1$$

مثال ۴-۲-۵ از مجموعه بردارهای متعامد مثال ۴-۲-۴ یک مجموعه متعامد یگه می‌سازیم. چون

$$|x| = \sqrt{x'x} = \sqrt{14}, \quad |y| = \sqrt{y'y} = \sqrt{5}, \quad |z| = \sqrt{z'z} = \sqrt{70}$$

بردارهای

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{-5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$$

یک مجموعه متعامد یگه تشکیل می‌دهند. ■

قضیه ۴-۲-۲ هر مجموعه متعامد از بردارهای غیرصفر یک فضای اقلیدسی مستقل خطی است.

اثبات: فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک مجموعه متعامد و $a_1, \dots, a_k$ اعداد حقیقی باشند. می‌نویسیم

$$a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = \theta$$

طرفین رابطه فوق را در x_1 ضرب داخلی می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$a_1 (x_1 \cdot x_1) + a_2 (x_1 \cdot x_2) + \dots + a_k (x_1 \cdot x_k) = x_1 \cdot \theta$$

حال با توجه به قضیه ۴-۲-۱ داریم $x \cdot \theta = 0$ و از متعامد بودن X داریم

$$x_1 \cdot x_2 = \dots = x_1 \cdot x_k = 0$$

پس

$$a_1 (x_1 \cdot x_1) = 0$$

و چون $x_1 \neq \theta$ داریم $x_1 \cdot x_1 > 0$ و در نتیجه $a_1 = 0$