

$$\exists c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \text{ s.t. } AC = b \rightarrow b = c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)}$$

$$\text{فضاهای برداری} \quad \text{۱۰۱} \quad \text{span}\{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\} = \text{sp}\{b, a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\}$$

$$\dim \text{sp}\{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\} = \dim \{b, a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\}$$

$$r(A) = r([A \mid b])$$

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $X = \{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\}$ مجموعه ستونهای A و

$X' = \{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}, b\}$ باشد. از تساوی رتبه ماتریس A و رتبه ماتریس $[A \mid b]$ نتیجه

می گیریم که

$$\dim \text{sp}(X') = \dim \text{sp}(X)$$

پس از قضیه ۲-۲-۳ نتیجه می گیریم که b یک ترکیب خطی از اعضای X است، یعنی

$$b = c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)} \quad , \quad c_1, \dots, c_m \in R$$

یعنی با توجه به لم ستونی می توان نوشت

$$Ac = b$$

که c یک ماتریس ستونی با درایه های $c_1, \dots, c_m$ است. اما رابطه فوق به این معنی است

که $x = c$ یک جواب معادله $Ax = b$ است.

(لزوم) نحوه استدلال عکس استدلال قسمت کفایت است. (تمرین) ■

قضیه ۳-۸-۸ الف) اگر A و B دو ماتریس هم بعد باشند، آنگاه $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

ب) اگر A و B قابل ضرب باشند آنگاه $r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$

اثبات: الف) فرض کنید $r(B) = k, r(A) = r$ در این صورت داریم

$$h_{(j)} = a_{(j)} + b_{(j)} \quad , \quad \forall j$$

حال اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ یک پایه برای فضای ستونی A و $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ یک پایه برای فضای

ستونی B باشد، داریم

$$h_{(j)} = (c_1 \alpha_1 + \dots + c_r \alpha_r) + (d_1 \beta_1 + \dots + d_k \beta_k) \quad , \quad \forall j$$

که $c_1, \dots, c_r$ و $d_1, \dots, d_k$ ضرایب حقیقی هستند.

رابطه فوق نشان می دهد که هر ستون ماتریس H یک ترکیب خطی از $r + k$ بردار

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_k$$

است. پس بنابر نتیجه ۳-۵-۱ داریم $r(H) \leq r + k$ و حکم ثابت است.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ و B یک ماتریس $m \times k$ و $D = AB$ باشد،

آنگاه

$$D = AB = A[b_{(1)} \dots b_{(k)}]$$

$$= [Ab_{(1)} \dots Ab_{(k)}]$$

$$D \text{ ستون } j \text{ ام} = d_{(j)} = Ab_{(j)} \quad \text{پس}$$

$$= b_{(1j)}a_{(1)} + \dots + b_{(mj)}a_{(m)} \quad \text{طبق لم ستونی}$$

یعنی هر ستون D یک ترکیب خطی از ستونهای A است. پس

فضای ستونی $AB \subset A$ فضای ستونی

که از قضیه ۳-۵-۳ نتیجه می شود.

$$r(AB) \leq r(A)$$

با استدلالی مشابه می توان نشان داد (تمرین) که

$$r(AB) \leq r(B)$$

پس حکم ثابت است. ■

قضیه ۳-۸-۹ اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد آنگاه

$$r(A') = r(A) \quad \text{(الف)}$$

$$r(AA') = r(A'A) = r(A) \quad \text{(ب)}$$

اثبات: تمرین. {راهنمایی: ابتدا لم زیر را ثابت کنید: ■

لم ۳-۸-۱ اگر $A \sim n \times k$ ، $B \sim r \times n$ ، $r < n$ و B تمام رتبه باشد، آنگاه $r(BA) = r(A)$

تعریف ۳-۸-۴ فرض کنید X مجموعه ای متناهی از بردارهای فضای V و X^* مستقل خطی و زیر مجموعه X باشد، آنگاه X^* را زیر مجموعه مستقل بیشینه X می نامیم اگر هیچ زیر مجموعه مستقل خطی دیگری از X با تعداد بردار بیشتری از X^* وجود نداشته باشد.

قضیه زیر یک راه عملی برای پیدا کردن یک زیر مجموعه مستقل بیشینه از یک مجموعه متناهی از اعضای R^n و در نتیجه تعیین رتبه یک ماتریس در اختیار ما قرار می دهد.

قضیه ۳-۸-۱۰ فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ و X مجموعه ستونهای A باشد و فرض کنید A را به کمک اعمال مقدماتی سطری به صورت ماتریس پلکانی درآوریم تا

$$r(AB) \leq r(B)$$

اثبات

موضوع ۱

رابطه صفحه ۱۵

$$D = AB = \begin{bmatrix} a_1' B \\ \vdots \\ a_i' B \\ \vdots \\ a_n' B \end{bmatrix}$$

$$D \text{ سطر } i \text{ لایه} = d_i' = a_i' B = a_i' \underbrace{b_1'} + \dots + a_i' \underbrace{b_m'}_{\text{سطر } m \text{ لایه } B}$$

سطر i لایه B سطر m لایه B

سپهر AB ترکیبی سطر از سطرهای B است.

فضای سطرهای $B \supseteq$ فضای سطرهای AB

$$\dim(\text{فضای سطرهای } AB) \leq \dim(\text{فضای سطرهای } B)$$

$$\rightarrow r(AB) \leq r(B)$$

لایه: فرض کنید $E \sim r \times k$, $r(P_1) = r$, ($r < n$) و $P_1 \sim n \times r$

$$r(P_1 E) = r(E)$$

اثبات: طبق تقسیم ۱-۲-۱ ماتریس B و C موجودند که

$$P_1 = B \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C$$

$$\rightarrow P_1 = B \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r(P_1) = r(I_r) = r \rightarrow I_r = I_r$$

$$r(P_1) = r(I_r) = r \rightarrow \text{رتبه } P_1 = \text{تعداد ستونهای } P_1$$

$$P_1 E = B \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} E = B \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا

$$\hookrightarrow r(P_1 E) = r \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = r(E)$$

مثال ۳-۸-۹: فرض کنید $r(A) = r$ ، طبق تنیم ۱-۶-۲، ما می‌توانیم مقدماتی

فرز کنیم (مکوسریز) P, Q هست که

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

که $P \sim n \times n$ و $Q \sim m \times m$ هست. می‌توانیم بنویسیم: (فرض $r < n$)

$$\rightarrow P = [P_1 \ P_2], \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

که $P_1 \sim n \times r$ و $Q_1 \sim r \times m$

$$A = [P_1 \ P_2] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [P_1 \ P_2] \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = P_1 Q_1$$

$$r(A) = r(Q_1) = r \quad \text{و طبق لمر قبلی}$$

$$A' = Q_1' P_1' \xrightarrow{\text{معقید}} r(A') = r = r(P_1') = r(P_1)$$

$$r(P_1) = r(Q_1) = r \quad \text{لذا}$$

و نیز نتایج داریم:

$$r(AA') = r(P_1 Q_1 Q_1' P_1') = r(Q_1 Q_1' P_1') =$$

$$= r(Q_1' P_1') = r(P_1') = r(P_1) = r = r(A)$$

$$r(A'A) = r(A) \quad \text{به طور مشابه تنیم می‌کنیم}$$

ماتریس B حاصل شود. اگر X^* مجموعه ستونهایی از A باشد که با ستونهایی از B که درایه پیشرو دارند، متناظراند آنگاه X^* یک زیر مجموعه مستقل بیشینه X است. اثبات: ابتدا ثابت می کنیم X^* یک مجموعه مستقل خطی است، ماتریس B را به صورت پلکانی سطری کاهش یافته درآورده، ستونهای دارای درایه پیشرو را کنار هم قرار می دهیم تا ماتریس حاصل به صورت

$$S = \begin{bmatrix} I_r & : & U \\ \dots & : & \dots \\ 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

درکفیه ۲-۷ تشریح
رله

درآید. حال اگر جای ستونهای متناظر در A را نیز (به همان ترتیب که جای ستونهای B را عوض کردیم) عوض کنیم ماتریس A به صورت

$$A^* = [C \quad : \quad D]$$

$$C \stackrel{R}{\sim} G = \begin{bmatrix} I_r \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

در خواهد آمد که بدیهی است. پس بنابر قضیه ۳-۸-۵ داریم

$$r(C) = r(G) = r$$

چون X^* مجموعه ستونهای C و دارای r عضو است از نتیجه ۳-۵-۱ و تعریف رتبه نتیجه می گیریم که اعضای X^* مستقل خطی هستند.

از طرفی چون ستونهای $H = \begin{bmatrix} U \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ را می توان به صورت ترکیبات خطی از ستونهای G نوشت داریم

کندون/ج
همه اصف را زیر طبعی هست.

$$r(S) = r(C) = r$$

و چون S هم ارز A است داریم $r(A) = r(S) = r$. پس X^* زیر مجموعه مستقل بیشینه X است چون در غیر این صورت باید $r(A) > r$ باشد. ■

مثال ۳-۸-۱ فرض کنید می خواهیم رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ را تعیین کنیم.

ماتریس A را طی مراحل زیر به ماتریس پلکانی سطری تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

چون فقط ستونهای اول و سوم B دارای درایه پیشرو هستند مجموعه

$$X^* = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

A است و در نتیجه $r(A) = 2$. ■

خودآزمایی

۱-۳ آیا اگر مجموعه $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ مولد فضای برداری V باشد، آنگاه لزوماً S برای V یک پایه است؟

۲-۳ آیا اگر مجموعه $S' = \{x_1, \dots, x_k\}$ وابسته خطی و مولد زیر فضای W باشد، آنگاه مجموعه $S = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ لزوماً مولد W است؟

۳-۳ آیا اگر در فضای n بعدی V مجموعه $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ مجموعه‌ای مستقل از بردارها باشد، آنگاه بازای هر $\alpha_n \in V$ مجموعه $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مولد فضای V است؟

۴-۳ آیا اگر A یک ماتریس $n \times n$ و $r(A) = n$ ، آنگاه مجموعه ستونهای A مولد R^n است؟

۵-۳ آیا هر فضای n بعدی ($n \geq 1$) دارای بینهایت پایه است؟

فصل ۴

فضاهای اقلیدسی

مقدمه

همان‌طور که در ابتدای فصل قبل اشاره شد نظریه فضاهای برداری مجرد با توجه به مفاهیم بردارها در فیزیک و مکانیک ابداع شده است. اما در مورد برداری مکانیکی کمیت‌هایی مانند طول، جهت و زاویه بین دو بردار مطرح است که تاکنون در نظریه فضاهای برداری به آنها نپرداخته‌ایم. در این فصل با الگو گرفتن از بردارهای مکانیکی فضاهای برداری مجرد را به یک عمل جبری دیگر بین دو بردار، به نام ضرب داخلی دو بردار، مجهز می‌کنیم و این ما را قادر می‌سازد مفاهیم جدید فوق را نیز در فضاهای برداری مجرد تعریف کنیم.

اهداف آموزشی

ضرب داخلی در فضاهای برداری و خواص اولیه آن

ماتریس ضرب داخلی

فضاهای اقلیدسی و مجموعه‌های متعامد یکه

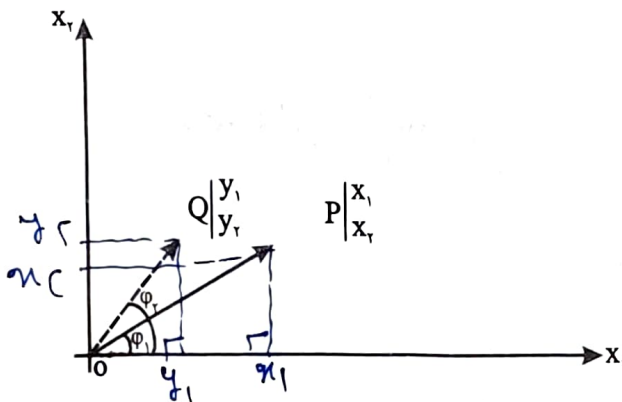
نامساوی‌های کوشی - شوارتز و مثلثی

فرایند گرام اشمیت

تصویر بردار و مجموعه متعمد

۱-۴ ضرب داخلی

می دانیم که در فضای دوبعدی بردارهای مکانیکی را می توان با یک پاره خط جهت دار از مبدا مختصات به یک نقطه از صفحه تعریف کرد. مثلاً شکل ۱-۱-۴ نشان دهنده دو بردار $p = \overrightarrow{OP}$ و $q = \overrightarrow{OQ}$ است که نقاط انتهایی آنها، P و Q ، به ترتیب دارای مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ هستند.



شکل ۱-۱-۴

اگر زاویه بین دو بردار را با θ و زاویه هایی را که این دو بردار با محور افقی می سازند به ترتیب با φ_1 و φ_2 نشان دهیم، با توجه به رابطه مثلثاتی

$$\cos \theta = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

می توان نوشت

$$\cos \theta = \frac{x_1}{OP} \times \frac{y_1}{OQ} + \frac{x_2}{OP} \times \frac{y_2}{OQ}$$

که $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ به ترتیب طولهای دو بردار p و q هستند. این رابطه را به صورت

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \cos \theta$$

نیز می توان نوشت، سمت راست رابطه فوق حاصلضرب داخلی دو بردار $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ نامیده می شود و در فیزیک و مکانیک مورد استفاده محاسباتی دارد.

اگر حاصلضرب داخلی دو بردار p و q را با $p \cdot q$ نشان دهیم، می توان نوشت:

$$p \cdot q = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (1-1-4)$$

$$p \cdot p = x_1^2 + x_2^2$$

$$= (\overline{OP})^2 \quad \text{از قضیه فیثاغورث}$$

یعنی

$$p \text{ طول بردار } p = \sqrt{p \cdot p} \quad (۲-۱-۴)$$

و

$$\cos \theta = \frac{p \cdot q}{\sqrt{(p \cdot p)(q \cdot q)}} \quad (۳-۱-۴)$$

ملاحظه می شود که طول یک بردار و زاویه بین دو بردار برحسب حاصل ضرب داخلی بردارها قابل تعریف است. حال با توجه به یکرختی فضای دوبعدی بردارهای مکانیکی و R^2 و مشابهت R^2 و R^n ضرب داخلی دوبردار در R^n را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۴-۱-۱ فرض کنید x و y دوبردار قائم عضو R^n (یعنی دوماتریس ستونی n بُعدی) باشند. حاصل ضرب داخلی x و y ، که آن را با $x \cdot y$ نشان می دهیم، برابر است با یک عدد حقیقی که از ضرب درایه های متناظر x و y در یکدیگر و جمع حاصل این ضربها به دست می آید، یعنی

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

تذکر: با کمی تسامح می توان نوشت

$$x \cdot y = x' y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

در واقع $x' y$ یک ضرب ماتریسی است (یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی) و حاصل آن یک ماتریس یک در یک است. در صورتی که حاصل $x \cdot y$ طبق تعریف یک عدد حقیقی است و در نتیجه تساوی $x \cdot y = x' y$ درست نیست. اما در این تساوی منظور از $x' y$ درایه ماتریس است و نه خود ماتریس. این تسامح، به خاطر سهولتی که در روابط جبری ایجاد می کند، مادام که ابهامی پیش نیارد، معمول است. با استفاده از تعریف ضرب داخلی در R^n و با تقلید از روابط (۴-۱-۱)،

$$(۲-۱-۴) \text{ و } (۳-۱-۴) \text{ طول بردار } x \text{ و زاویه بین دوبردار } x \text{ و } y \text{ در } R^n \text{ را به صورت}$$

$$x \text{ طول } x = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x' x} \quad (۴-۱-۴)$$

و

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\sqrt{(x \cdot x)(y \cdot y)}} = \frac{x' y}{\sqrt{(x' x)(y' y)}} \quad (5-1-4)$$

تعریف می‌کنیم. ضمناً چون کوسینوس زاویه 90° برابر صفر است، دوبردار را در R^n متعامد (عمود بر هم) می‌نامیم اگر حاصل ضرب داخلی آنها صفر باشد.

در جهت ارائه یک تعریف کلی برای ضرب داخلی بردارها در فضاهاى برداری مجرد، ملاحظه می‌کنیم که ضرب داخلی در R^n دارای ویژگیهای چهارگانه زیر است (تمرین)

$$i) x \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$ii) x \cdot y = y \cdot x \quad (6-1-4)$$

$$iii) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$iv) (cx) \cdot y = c(x \cdot y), \quad \forall c \in R$$

پس مفهوم ضرب داخلی دوبردار را به صورت زیر به یک فضای برداری عمومی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۴-۱-۲ فرض کنید V یک فضای برداری است. حاصلضرب داخلی بر V تابعی است که به هر زوج x و y از اعضای V یک عدد حقیقی $x \cdot y$ نسبت می‌دهد که در ویژگیهای چهارگانه (۴-۱-۶) صدق کند.

مسلماً تعریف ۴-۱-۱ برای ضرب داخلی در R^n با تعریف کلی فوق سازگار است ولی تنها ضرب داخلی قابل تعریف بر R^n نیست. مثال زیر این مطلب را تأیید می‌کند.

مثال ۴-۱-۱ تحقیق می‌کنیم که ضرب داخلی در R^2 تعریف شده به صورت

$$x \cdot y = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2, \quad \forall x, y \in R^2$$

در ویژگیهای چهارگانه (۴-۱-۶) صدق می‌کند.

$$x \cdot x = x_1 x_1 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 2x_2 x_2 \quad (i)$$

$$= x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

ویژگی (ii) بدیهی است و ویژگیهای (iii) و (iv) به راحتی تحقیق می‌شوند. ■