

ماتریس C را که در واقع ستونهایش بردارهای مختصات اعضای T نسبت به S هستند، ماتریس انتقال (از T به S) می‌نامیم. بنابراین با داشتن $[x]_T$ برای به دست آوردن $[x]_S$ کافیست آن را از سمت راست در ماتریس انتقال ضرب کنیم.

مثال ۳-۷-۱ فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2]$ و $S = [\beta_1, \beta_2]$ دو پایه مرتب برای R_2 باشند

$$\text{که } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ در این صورت داریم}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_2 = -2\beta_1 + \beta_2$$

و در نتیجه

$$[\alpha_1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\alpha_2]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس انتقال از T به S عبارت است از

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه به ازای هر $x \in R^2$ داریم

$$[x]_S = C[x]_T$$

$$\text{مثلاً اگر } [x]_T = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ یعنی اگر } x = \begin{bmatrix} 18 \\ 33 \end{bmatrix} \text{ باشد، داریم}$$

$$[x]_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

تذکر: توجه کنید که ماتریس انتقال از T به S به ترتیب اعضاء در T و S بستگی دارد.

قضیه ۳-۷-۱ فرض کنید T و S دو پایه مرتب برای فضای برداری V_n و C ماتریس انتقال از T به S باشد، آنگاه

(الف) C یکتا است.

(ب) C وارون‌پذیر است.

۹۵ فضاهای برداری $A_{aj} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \text{ستون } j\text{م}$

پ) C^{-1} ماتریس انتقال از S به T است.

اثبات: الف) فرض کنید D نیز ماتریس انتقال از T به S باشد. در این صورت به ازای هر

$x \in V_n$ داریم

$$[x]_S = C[x]_T, \quad [x]_S = D[x]_T$$

و در نتیجه به ازای هر $x \in V_n$ داریم

$$(C - D)[x]_T = 0_n$$

و چون با توجه به یکرخیته V_n و R^n ، وقتی x فضای V_n را می پیماید $[x]_T$ فضای R^n را

می پیماید. می توان نوشت

$$(C - D)a = 0_n, \quad \forall a \in R^n$$

با استفاده از تمرین ۱-۴ نتیجه می گیریم که

$$C - D = 0$$

یعنی $C = D$.

ب) با استفاده از تعریف ماتریس انتقال از رابطه

$$C[x]_T = 0_n$$

نتیجه می گیریم که $[x]_S = 0_n$ پس با استفاده از قضیه ۳-۶-۳ داریم $x = \theta$ که با استفاده

مجدد از همان قضیه نتیجه می گیریم که $[x]_T = 0_n$. چون V_n و R^n یکرخت هستند.

می توان نوشت معنی دستگاه $Cx = 0$ تنها جواب $x = 0$ است.

$$Ca = 0_n \Rightarrow a = 0_n$$

و در نتیجه C وارون پذیر است (نتیجه ۲-۵-۴ قسمت ت).

پ) طبق تعریف C به ازای $x \in V_n$ داریم

$$[x]_S = C[x]_T$$

از ضرب طرفین (از سمت چپ) در C^{-1} داریم

$$[x]_T = C^{-1}[x]_S$$

$a_j = \begin{bmatrix} \vdots \\ j \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow$ زمنه درای

ستون $(C-D)a_j = C-D$

۲.۵.۴ C وارون پذیر است

و طبق تعریف ماتریس انتقال، اثبات کامل است. ■

۸-۳ رتبه ماتریس

چون مجموعه ستونهای یک ماتریس $n \times m$ یک زیر مجموعه متناهی از فضای برداری R^n و مجموعه سطرهای آن یک زیر مجموعه متناهی از فضای برداری R_m است، می توان با استفاده از نتایج و مفاهیم نظریه فضاها برداری مفاهیم بیشتری در مورد ماتریس ها تعریف کرده، نتایج جدیدی به دست آورد. به تعاریف زیر توجه کنید.

تعریف ۸-۳-۱ فرض کنید X مجموعه ستونهای یک ماتریس $n \times m$ مانند A و Y مجموعه سطرهای آن باشد. در این صورت گستره X را که یک زیر فضای R^n است فضای ستونی A و گستره Y را که یک زیر فضای R_m است فضای سطری A نامیم. اعمال مقدماتی ستونی فضای ستونی یک ماتریس و اعمال مقدماتی سطری فضای سطری یک ماتریس را تغییر نمی دهند. برای اثبات این مطلب ابتدا قضیه کلی تر زیر را ثابت می کنیم.

قضیه ۸-۳-۱ فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ زیر مجموعه ای از فضای برداری V باشد، آنگاه هیچکدام از اعمال زیر گستره X را تغییر نمی دهد.

- (الف) عوض کردن جای دو عضو X
 - (ب) ضرب یک عضو X در عددی مخالف صفر
 - (پ) افزودن مضربی از یک عضو X به عضوی دیگر.
- اثبات: الف) بدیهی است.

(ب) فرض کنید $c \neq 0$ و $y = cx_1$ و $X' = \{y, x_2, \dots, x_k\}$ و $X'' = \{y, x_2, \dots, x_k\}$ چون X یک ترکیب خطی از اعضای X است داریم (قضیه ۸-۳-۲).

$$sp(X') = sp(X)$$

و چون x_1 یک ترکیب خطی از اعضای X'' است $(x_1 = \frac{1}{c}y)$ داریم

$$\begin{aligned} sp(X'') &= sp(X') \\ &= sp(X) \end{aligned}$$

پ) فرض کنید c یک عدد حقیقی، $y = x_1 + cx_2$ ، $X' = \{y, x_1, \dots, x_k\}$ و $X'' = \{y, x_2, \dots, x_k\}$. چون y یک ترکیب خطی از اعضای X و x_1 یک ترکیب خطی از اعضای X'' است ($x_1 = y - cx_2$) با استدلالی مشابه استدلال قسمت (ب) نتیجه حاصل است. ■

قضیه زیر نتیجه فوری قضیه فوق است.

قضیه ۳-۸-۲

اگر $A \overset{C}{\sim} B$ آنگاه فضای ستونی $B =$ فضای ستونی A

و اگر $A \overset{R}{\sim} B$ آنگاه فضای سطری $B =$ فضای سطری A

به عبارت دیگر اعمال مقدماتی ستونی فضای ستونی و اعمال مقدماتی سطری فضای سطری یک ماتریس را تغییر نمی دهند.

بعد فضای ستونی یک ماتریس را رتبه ستونی و بعد فضای سطری آن را رتبه سطری آن ماتریس نامیم. قضیه زیر نشان می دهد که در واقع نیازی به تفکیک رتبه یک ماتریس از نظر سطری و ستونی نیست.

قضیه ۳-۸-۳ رتبه سطری هر ماتریس با رتبه ستونی آن برابر است.

اثبات: فرض کنید $A = \{a_{ij}\}$ یک ماتریس $n \times m$ با رتبه سطری r و $T = \{\beta'_1, \dots, \beta'_r\}$ یک پایه برای فضای سطری A باشد. چون هر سطر A را می توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای T نوشت داریم

$$a'_1 = c_{11}\beta'_1 + \dots + c_{1r}\beta'_r$$

⋮

$$a'_n = c_{n1}\beta'_1 + \dots + c_{nr}\beta'_r$$

که در آن c_{ij} ضرایب حقیقی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{فضای بردار} = \text{SP} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\alpha_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\alpha_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\alpha_3} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \text{ مستقل خطی}, \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ مستقل خطی}$$

$$\alpha_3 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = -3 \\ 3c_1 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -2 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{SP} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \} = \text{SP} \{ \alpha_1, \alpha_2 \}$$

$$\text{فضای بردار} \alpha_1, \alpha_2 \text{ تحت } A$$

$$\rightarrow \text{رتبه بردار} = 2 \rightarrow r(A) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$

$$\rightarrow \text{فضای بردار} A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$$

$$\text{رتبه بردار } A = 3$$

$$\rightarrow r(A) = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

اگر ماتریس‌های سطری $a'_1, \dots, a'_n$ و $\beta'_1, \dots, \beta'_r$ را بر حسب درایه‌هایشان بنویسیم داریم

$$(a_1 \dots a_{1j} \dots a_{1m}) = c_{11}(\beta_{11} \dots \beta_{1j} \dots \beta_{1m}) + \dots + c_{1r}(\beta_{r1} \dots \beta_{rj} \dots \beta_{rm})$$

⋮

$$(a_n \dots a_{nj} \dots a_{nm}) = c_{n1}(\beta_{11} \dots \beta_{1j} \dots \beta_{1m}) + \dots + c_{nr}(\beta_{r1} \dots \beta_{rj} \dots \beta_{rm})$$

از تساوی‌های ماتریسی فوق نتیجه می‌گیریم که

$$a_{1j} = c_{11}\beta_{1j} + \dots + c_{1r}\beta_{rj}$$

⋮

$$j = 1, \dots, m$$

$$a_{nj} = c_{n1}\beta_{1j} + \dots + c_{nr}\beta_{rj}$$

اگر ضرایب c_{ij} را درایه‌های یک ماتریس $n \times r$ مانند C فرض کنیم می‌توانیم بنویسیم

$$a_{(j)} = \beta_{1j}c_{(1)} + \dots + \beta_{rj}c_{(r)} \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

که $a_{(i)}$ ستون i ام A و $c_{(j)}$ ستون j ام C است.

رابطه فوق به این معنی است که هر ستون A را می‌توان به صورت یک ترکیب

خطی از مجموعه $X = \{c_{(1)}, \dots, c_{(r)}\}$ نوشت، پس

$$A = sp(X) = \text{فضای ستونی } A$$

پس بنابر قضیه ۳-۵-۳

$$\dim sp(X) \leq \text{بعد فضای ستونی } A = \text{رتبه ستونی } A$$

و چون بنابر نتیجه ۳-۵-۱ داریم $\dim sp(X) \leq r$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\text{رتبه ستونی } A \leq r = \text{رتبه سطری } A$$

با استدلالی مشابه استدلال فوق می‌توان ثابت کرد که

$$\text{رتبه سطری } A \geq \text{رتبه ستونی } A$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم که

$$\text{رتبه ستونی } A = \text{رتبه سطری } A \quad \blacksquare$$

با توجه به قضیه فوق تعریف زیر ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳-۸-۲ رتبه یک ماتریس مانند A که آن را با $r(A)$ نشان می‌دهیم عبارت است

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \{a_1, \dots, a_m\}$$

مستقل
حداکثر پایه طبیعی
 $r(I_m) = m$
 $\mathbb{R}^m$

از بعد فضای ستونی (یا سطری) A .

با توجه به قضیه زیر رتبه یک ماتریس هیچگاه از تعداد سطرها یا ستونهای آن

ماتریس تجاوز نمی کند.

قضیه ۳-۸-۴ فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ است. در این صورت

$$r(A) \leq \min(n, m)$$

اثبات: چون ستونهای A اعضای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ هستند، از قضیه ۳-۵-۳ نتیجه

می شود که $\dim \mathbb{R}^n = n$ زیرفضای از $\mathbb{R}^n$ است.

$$A \text{ فضا/ستونی } = \text{span}\{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow r(A) \leq n$$

و از نتیجه ۳-۵-۱ نتیجه می شود زیرفضای از $\mathbb{R}^m$ است.

$$A \text{ فضا/سطری } = \text{span}\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\} \rightarrow r(A) \leq m$$

$\dim \mathbb{R}^m = m$

تعریف ۳-۸-۳ اگر A یک ماتریس $n \times m$ ، $r(A) = \min\{n, m\}$ باشد، A را تمام رتبه می نامیم.

قضیه ۳-۸-۵ فرض کنید A و B دو ماتریس هم بعد باشند، در این صورت $r(A) = r(B)$ اگر و تنها اگر A و B هم ارز باشند.

اثبات:

(کفایت) فرض کنید A و B هم ارز هستند. در این صورت با تعدادی اعمال مقدماتی سطری و ستونی می توان از A به B رسید. با توجه به قضیه ۳-۸-۲ و تعریف رتبه پس از انجام هریک از اعمال مقدماتی مزبور رتبه ماتریس بدون تغییر باقی می ماند پس $r(A) = r(B)$.

(لزوم) فرض کنید $r(A) = r(B)$. بنابر قضیه ۲-۶-۷ به وسیله اعمال مقدماتی

سطری و ستونی می توان A را به ماتریسی مانند $C = \begin{bmatrix} I_k & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix}$ و B را به ماتریسی

مانند $D = \begin{bmatrix} I_{k'} & \vdots & O \\ \dots & \vdots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix}$ تبدیل کرد. چون رتبه های دو ماتریس اخیر به

$$r(A) = r(C) = k$$

$$r(B) = r(D) = k'$$

ترتیب k و k' است و به ترتیب با A و B هم ارز هستند، از قسمت کفایت نتیجه می گیریم که $k = r = k'$ و در نتیجه $C = D$ پس A و B هر دو هم ارز یک ماتریس بوده و در نتیجه هم ارز هستند. ■

نتیجه ۳-۸-۱ اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه A وارون پذیر است اگر و تنها اگر

$$r(A) = n$$

$$A \sim I_n \rightarrow A \text{ معکوس پذیر است}$$

$$r(A) = n \Rightarrow$$

اثبات: با توجه به قضیه فوق و قضیه ۲-۶-۵ بدیهی است. ■

$$A \Rightarrow A \sim I_n \text{ معکوس پذیر}$$

نتیجه ۳-۸-۲ اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه A وارون پذیر است اگر و تنها اگر

ستونهای (سطرهای) A یک مجموعه مستقل خطی از اعضای R^n (R_n) باشد.

اثبات: تمرین ■

قضیه زیر نشان می دهد که رتبه یک ماتریس در اثر ضرب آن در یک ماتریس نامنفرد تغییر نمی کند.

قضیه ۳-۸-۶ فرض کنید B و C ماتریسهای نامنفرد هستند در این صورت

$$r(AB) = r(CA) = r(A)$$

اثبات: با توجه به اینکه هر ماتریس نامنفرد را می توان به صورت حاصل ضرب ماتریسهای مقدماتی نوشت داریم

$$AB \sim A, CA \sim A$$

و نتیجه از قضیه ۳-۸-۵ حاصل می شود. ■

همان طور که قضیه زیر نشان می دهد. شرط جواب داشتن یک دستگاه معادلات خطی بر حسب رتبه ماتریسها قابل بیان است.

قضیه ۳-۸-۷ معادله $Ax = b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر

$$r(A) = r([A:b])$$

$$\exists c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \text{ s.t. } AC = b \rightarrow b = c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)}$$

$$\text{span}\{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\} = \text{sp}\{b, a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\}$$

$$\dim \text{sp}\{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\} = \dim \{b, a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\}$$

$$r(A) = r([A \mid b])$$

اثبات:

(کفایت) فرض کنید $X = \{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}\}$ مجموعه ستونهای A و

$X' = \{a_{(1)}, \dots, a_{(m)}, b\}$ باشد. از تساوی رتبه ماتریس A و رتبه ماتریس $[A \mid b]$ نتیجه

می گیریم که

$$\dim \text{sp}(X') = \dim \text{sp}(X)$$

پس از قضیه ۳-۲-۲ نتیجه می گیریم که b یک ترکیب خطی از اعضای X است، یعنی

$$b = c_1 a_{(1)} + \dots + c_m a_{(m)} \quad , \quad c_1, \dots, c_m \in R$$

یعنی با توجه به لم ستونی می توان نوشت

$$Ac = b$$

که c یک ماتریس ستونی با درایه های $c_1, \dots, c_m$ است. اما رابطه فوق به این معنی است

که $x = c$ یک جواب معادله $Ax = b$ است.

(لزوم) نحوه استدلال عکس استدلال قسمت کفایت است. (تمرین) ■

قضیه ۳-۸-۸ الف) اگر A و B دو ماتریس هم بعد باشند، آنگاه $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

ب) اگر A و B قابل ضرب باشند آنگاه $r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$

اثبات: الف) فرض کنید $r(A) = r$ و $r(B) = k$ و $H = A + B$ در این صورت داریم

$$h_{(j)} = a_{(j)} + b_{(j)} \quad , \quad \forall j$$

حال اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ یک پایه برای فضای ستونی A و $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ یک پایه برای فضای

ستونی B باشد، داریم

$$h_{(j)} = (c_1 \alpha_1 + \dots + c_r \alpha_r) + (d_1 \beta_1 + \dots + d_k \beta_k) \quad , \quad \forall j$$

که $c_1, \dots, c_r$ و $d_1, \dots, d_k$ ضرایب حقیقی هستند.

رابطه فوق نشان می دهد که هر ستون ماتریس H یک ترکیب خطی از $r + k$ بردار

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_k$$

است. پس بنابر نتیجه ۳-۵-۱ داریم $r(H) \leq r + k$ و حکم ثابت است.

ب) فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ و B یک ماتریس $m \times k$ و $D = AB$ باشد،

آنگاه