

$$\dim P_j < \dim P_n, \quad \forall i < n$$

و

$$\dim P_n < \dim P$$

که P مجموعه کلیه چند جمله ایها است. ضمناً چون می دانیم که $\dim P_n = n + 1$ (مثال ۳-۵-۱) داریم

$$\dim P > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

که N مجموعه اعداد طبیعی است. یعنی بعد فضای برداری P از هر عدد طبیعی بزرگتر است. چنین فضای برداری را یک فضای برداری بینهایت بعدی می نامیم. ■
تعریف دقیقتر فضاهای بینهایت بعدی به صورت زیر است.

تعریف ۳-۵-۳ یک فضای برداری را بینهایت بعدی می نامیم اگر به ازای هر عدد

طبیعی n یک زیر مجموعه مستقل خطی n عضوی داشته باشد. $P =$ فضای تمام چند جمله ایها
 $\rightarrow \dim P = \infty$ برابر مقدار $\{t^0, t^1, \dots, t^n\}$ از آنرا به نام مکتز
 ۳-۶ مختصات و یکریختی

در این بخش خواهیم دید کلیه فضاهای برداری هم بعد از نقطه نظر جبری مشابه هم عمل می کنند، یعنی فضاهای برداری هم بعد دارای ویژگیهای متناظر یکسان هستند. به عبارت دیگر هر نتیجه ریاضی اثبات شده در یک فضای برداری متناظر و مشابه نتیجه ای در هر فضای برداری دیگر با همان بُعد است، یعنی رفتار جبری فضاهای برداری هم بعد یکسان بوده و تنها تفاوت آنها در ظاهر اعضایشان می باشد. ابتدا به یادآوری تعاریف و نتایج زیر از مبانی ریاضیات می پردازیم.

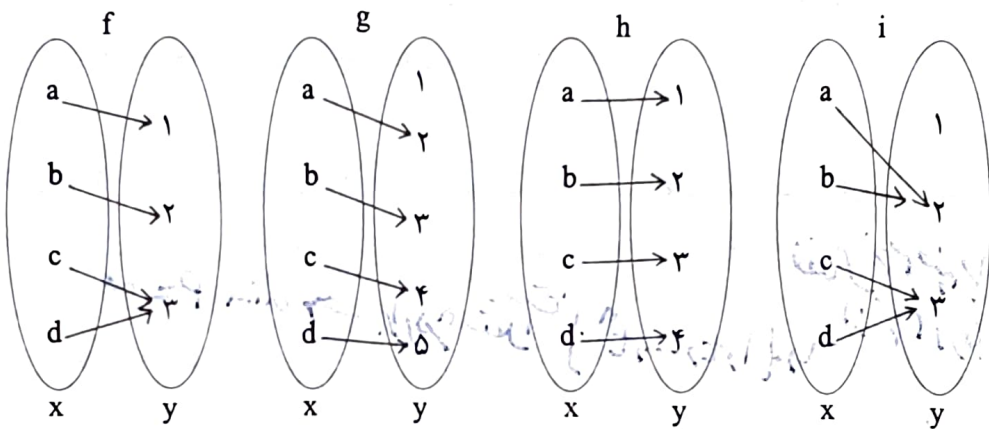
تعریف ۳-۶-۱ تابع $f: X \rightarrow Y$ را که در آن X مجموعه آغاز و دامنه f است، پوشا (یا به روی) می نامیم اگر به ازای هر $y \in Y$ عضوی مانند $x \in X$ وجود داشته باشد طوری که $y = f(x)$ باشد.

وجه تسمیه کلمه پوشا این است که تحت چنین تابعی تصویر X تمام Y را می پوشاند.

تعریف ۳-۶-۲ تابع $f: X \rightarrow Y$ را، که در آن X مجموعه آغاز و دامنه f است، یک به یک می‌نامیم اگر به ازای x_1 و x_2 متعلق به X ، تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ تساوی $x_1 = x_2$ را نتیجه دهد.

در یک تابع یک به یک هر عضو Y که نگاره عضوی از X باشد، نگاره فقط یک عضو از X است. توجه کنید که پوشا بودن و یک به یک بودن یک تابع هیچ‌کدام دیگری را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۳-۶-۱ از توابعی که در شکل ۳-۶-۱ تعریف شده‌اند، تابع f پوشا است ولی



شکل ۳-۶-۱

یک به یک نیست، تابع g یک به یک است ولی پوشا نیست در حالی که تابع h هم پوشا و هم یک به یک و تابع i نه پوشا و نه یک به یک است. ■

تعریف ۳-۶-۳ فرض کنید V یک فضای برداری با جمع برداری $\oplus$ و ضرب اسکالر $\odot$ و W یک فضای برداری با جمع برداری $\boxplus$ و ضرب اسکالر $\boxodot$ باشد، گوئیم V با W یکرخت است اگر تابعی یک به یک و پوشا مانند $L: V \rightarrow W$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$L(x_1 \oplus x_2) = L(x_1) \boxplus L(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in V \quad (\text{الف})$$

$$L(c \odot x) = c \boxodot L(x), \quad \forall x \in V, c \in R \quad (\text{ب})$$

در این صورت L را یک یکرختی از V به W می‌نامیم.
اثبات قضیه زیر که ویژگیهای انعکاس، تقارن و تعدی یکرختی را بیان می‌کند، ساده و جزو تمرینهای فصل ۵ است.

قضیه ۳-۶-۱

$$L(x) = x \quad \text{یا} \quad L = id = I$$

(الف) هر فضای برداری با خودش یکرخت است.

(ب) اگر فضای برداری V با فضای برداری W یکرخت باشد، W نیز با V

$$L_1: V \rightarrow W \Rightarrow L_2: W \rightarrow V$$

یکرخت است.

(پ) اگر فضای برداری V با فضای برداری W و W با فضای برداری U یکرخت

$$L_1: V \rightarrow W \text{ و } L_2: W \rightarrow U \Rightarrow L_3: V \rightarrow U$$

باشد، آنگاه V با U یکرخت است. می‌دانیم که هر عضو یک فضای برداری را می‌توانیم به صورت یک ترکیب خطی از اعضای یک پایه آن فضا بنویسیم. براساس تعریف زیر نهایتاً نشان خواهیم داد که فضاهای برداری هم بعد یکرخت هستند. در این تعریف به کار بردن گروه به جای آکولاد در تعریف پایه به این معنی است که ترتیب اعضای پایه اهمیت دارد.

تعریف ۳-۶-۴ فرض کنید $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V_n و x

بردار در V_n باشد، در این صورت ماتریس ستونی $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ را که در آن

$a_1, \dots, a_n$ ضرایب حقیقی بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ در رابطه

$$x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n$$

هستند، بردار مختصات بردار x نسبت به پایه مرتب T نامیده و با نماد $[x]_T$ نشان می‌دهیم. اعداد حقیقی $a_1, \dots, a_n$ را مختصات x (نسبت به پایه مرتب T) می‌نامیم.

تذکر: توجه کنید که با توجه به قضیه ۳-۴-۲ بردار مختصات هر عضو V_n نسبت به یک پایه مرتب مفروض یکتا است.

مثال ۳-۶-۲ فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2]$ که در آن $\alpha_1 = 3t + 1$ و $\alpha_2 = t - 1$ یک پایه مرتب برای P_1 و $x = 4t + 4$ عضوی از P_1 باشد. در این صورت داریم

$$[x]_T = T = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

زیرا از رابطه

$$4t + 4 \equiv a_1(3t + 1) + a_2(t - 1)$$

دستگاه

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 = 4 \end{cases}$$

حاصل می شود که دارای جوابهای $a_1 = 2$ و $a_2 = -2$ است.

$$[x]_{T'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ مسلماً اگر } T' = [\alpha_2, \alpha_1] \text{ باشد آنگاه}$$

اگر $T'' = [\beta_1, \beta_2]$ باشد، که $\beta_1 = t + 1$ و $\beta_2 = t - 1$ آنگاه به روش مشابه خواهیم داشت

$$a_1 = 4t + 4 = 4(t + 1) + 0(t - 1)$$

$$[x]_{T''} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۳-۶-۳ فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ که $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

یک پایه مرتب برای R^3 و $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ باشد. در این صورت می توان نوشت (تحقیق کنید)

$$x = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3$$

پس بردار مختصات x نسبت به پایه مرتب T عبارت است از

$$[x]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

■

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ -2 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_r \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ -1 \end{bmatrix} + a_w \begin{bmatrix} r \\ 1 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_r + r a_w = 0 \\ r a_r + a_w = \varepsilon \\ a_1 - a_r + r a_w = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} & r a_r = 2 \rightarrow a_r = \frac{2}{r} \\ & a_w = -\varepsilon \end{aligned}$$

$$\rightarrow a_1 = -a_r - r a_w = -\frac{2}{r} + \varepsilon = 1$$

$$\rightarrow u = a_1 + r a_r - r a_w \rightarrow [u]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ -r \end{bmatrix}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_r \\ u_w \end{bmatrix} : u_1 + u_r + u_w = 0 \right\} \rightarrow \text{line}$$

$$T = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\alpha_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\alpha_r} \right\} \rightarrow \text{basis}$$

$$u = \begin{bmatrix} -r \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow [u]_T = ?$$

$$u = a_1 \alpha_1 + a_r \alpha_r = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_r \\ -a_1 - a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a_1 = -r, a_r = 1$$

$$\rightarrow [u]_T = \begin{bmatrix} -r \\ 1 \end{bmatrix}$$

تذکر: از تعریف مختصات و مثالهای فوق روشن است که بردارهای مختصات اعضای یک فضای برداری n بعدی اعضای R^n هستند و به علاوه هر عضو R^n بردار مختصات یک و فقط یک عضو یک فضای برداری n بعدی نسبت به یک پایه مرتب است.

دو قضیه زیر در اثبات یکرختی فضاهای برداری هم بعد به ما کمک می‌کند.

$$T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

قضیه ۳-۶-۲ فرض کنید T یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد. در این صورت

$$[x]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \leftrightarrow x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n \quad \rightarrow \quad x \oplus y = (a_1 + b_1) \alpha_1 + \dots + (a_n + b_n) \alpha_n$$

$$[y]_T = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \leftrightarrow y = b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n \quad \rightarrow \quad [x \oplus y]_T = [x]_T + [y]_T$$

$$[x \oplus y]_T = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

$$ii) [c \odot x]_T = c[x]_T$$

$$\forall x, y \in V, \forall c \in R$$

$$c \odot x = (c a_1) \alpha_1 + \dots + (c a_n) \alpha_n \rightarrow [c \odot x]_T = \begin{bmatrix} c a_1 \\ \vdots \\ c a_n \end{bmatrix}$$

اثبات: تمرین ■

قضیه ۳-۶-۳ فرض کنید T یک پایه مرتب برای فضای برداری V_n و x برداری در V_n

باشد، آنگاه $[x]_T = 0_n$ اگر و تنها اگر $x = \theta$

اثبات: با استفاده از تعریف مختصات و قسمت (ii) از قضیه فوق آسان است.

$$c_1 [x_1]_T + \dots + c_k [x_k]_T = 0_n \leftrightarrow [c_1 x_1 + \dots + c_k x_k]_T = 0_n$$

$$c_1 x_1 + \dots + c_k x_k = \theta$$

(تمرین) ■

نتیجه ۳-۶-۱: مجموعه $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ از بردارهای فضای برداری V_n مستقل خطی است اگر و تنها اگر مجموعه $Y = \{[x_1]_T, \dots, [x_k]_T\}$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از R^n باشد.

اثبات: با استفاده از دو قضیه فوق ساده است. (تمرین)

قضیه ۳-۶-۴ هر فضای برداری n بعدی با R^n یکرخت است.

اثبات: فرض کنید V_n یک فضای برداری n بعدی باشد. در این صورت تابع $L: V_n \rightarrow R^n$

را به صورت

$$L(x) = [x]_T, \quad \forall x \in V_n$$

تعریف می‌کنیم که در آن T یک پایه مرتب برای V_n است. با توجه به تذکر بعد از تعریف ۳-۶-۴، تذکر بعد از مثال ۳-۶-۳ و قضیه ۳-۶-۳، L یک تابع یک به یک و پوشا از V_n به R^n است.

به علاوه با توجه به قضیه ۳-۶-۲، L دارای دو ویژگی تعریف یکرختی (تعریف ۳-۶-۳) نیز هست. پس L یک یکرختی است و اثبات کامل می‌باشد. ■
اثبات قضیه زیر با استفاده از نتایج و مفاهیم فصل ۵ ساده تر است و جزو تمرینهای آن فصل می‌باشد.

قضیه ۳-۶-۵ اگر فضاهای برداری R^m و R^n یکرخت باشند، آنگاه $n = m$.

قضیه ۳-۶-۶ (قضیه یکرختی) دو فضای برداری یا بعد متناهی یکرخت اند اگر و تنها اگر هم بعد باشند.

اثبات: فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند آنگاه

(کفایت) اگر $\dim V = \dim W = n$ ، بنابر قضیه ۳-۶-۳ هر دو با R^n یکرخت اند

و بنابر ویژگی تعدی یکرختی (قضیه ۳-۶-۱ قسمت پ) V و W یکرخت اند.

(لزوم) فرض کنید $\dim V = n$ و $\dim W = m$. در این صورت بنابر قضیه ۳-۶-۳

V با R^n و W با R^m یکرخت است. چون طبق فرض V و W یکرخت اند، از ویژگی

تعدی یکرختی و از قضیه ۳-۶-۵ نتیجه می‌شود که $m = n$. ■

نتیجه ۳-۶-۱ اگر فضای برداری V با R^n یکرخت باشد آنگاه $\dim V = n$.

اثبات: بلافاصله از قضیه یکرختی نتیجه می‌شود.

تذکر: توجه کنید که چون به ازای هر $n \geq 1$ R^n یک مجموعه نامتناهی است، هر فضای

برداری با بعد مثبت یک مجموعه نامتناهی می‌باشد، زیرا اگر $\dim V = n \geq 1$ آنگاه V و

R^n یکرخت اند و در نتیجه V نیز نامتناهی است. در واقع تنها فضای برداری متناهی

فضای برداری یک عضوی $\{\theta\}$ است که بعد آن را صفر تعریف کرده ایم. (تبصره متعاقب تعریف ۳-۵-۱). ضمناً توجه کنید که R^1 (مجموعه ماتریس های یک در یک) با R (مجموعه اعداد حقیقی) یکریخت است. در آینده هر جا که ابهامی پیش نیاید R^1 و R را یکی فرض می کنیم.

۳-۷ ماتریس انتقال

گاهی اوقات مایلیم با دانستن مختصات یک بردار نسبت به یک پایه مرتب T مختصات آن را نسبت به یک پایه مرتب دیگر مانند S بیابیم. این کار با استفاده از ماتریس خاصی که در زیر تعریف می کنیم به سهولت انجام می شود.

فرض کنید $T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ و $S = [\beta_1, \dots, \beta_n]$ دو پایه مرتب برای فضای برداری V_n ، x برداری در V_n و $[x]_T = a$ ، $[x]_S = b$ بردارهای مختصات بردار x به ترتیب نسبت به T و S باشند، همچنین فرض کنید.

$$[\alpha_1]_S = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}, \dots, [\alpha_n]_S = \begin{bmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

به ترتیب مختصات بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ نسبت به S باشند آنگاه می توان نوشت

$$x = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n, \quad a_1, \dots, a_n \in R$$

و با توجه به قضیه ۳-۶-۲ داریم

$$\begin{aligned} [x]_S &= a_1 [\alpha_1]_S + \dots + a_n [\alpha_n]_S \\ &= a_1 \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حال اگر C ماتریس $n \times n$ با درایه های c_{ij} باشد طبق لم ستونی داریم

$$\begin{aligned} [x]_S &= Ca \\ &= C[x]_T \end{aligned}$$

ماتریس C را که در واقع ستونهایش بردارهای مختصات اعضای T نسبت به S هستند، ماتریس انتقال (از T به S) می‌نامیم. بنابراین با داشتن $[x]_T$ برای به دست آوردن $[x]_S$ کافیست آن را از سمت راست در ماتریس انتقال ضرب کنیم.

مثال ۳-۷-۱ فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2]$ و $S = [\beta_1, \beta_2]$ دو پایه مرتب برای R_2 باشند

$$\text{که } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ در این صورت داریم}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_2 = -2\beta_1 + \beta_2$$

و در نتیجه

$$[\alpha_1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\alpha_2]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس انتقال از T به S عبارت است از

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه به ازای هر $x \in R^2$ داریم

$$[x]_S = C[x]_T$$

$$\text{مثلاً اگر } [x]_T = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ یعنی اگر } x = \begin{bmatrix} 18 \\ 33 \end{bmatrix} \text{ باشد، داریم}$$

$$[x]_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

تذکر: توجه کنید که ماتریس انتقال از T به S به ترتیب اعضاء در T و S بستگی دارد.

قضیه ۳-۷-۱ فرض کنید T و S دو پایه مرتب برای فضای برداری V_n و C ماتریس

انتقال از T به S باشد، آنگاه

(الف) C یکتا است.

(ب) C وارون‌پذیر است.