

برای زیرفضای زیر از $\mathbb{R}^4$ پایه‌ای بیابید.

۱۴ / /

تاریخ:

موضوع:

$$W = \left\{ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : u_4 = u_1 + u_3 \right\}$$

$$W \ni \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + u_3 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ مولد فضای W است.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad ?$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

لذا X متعلق فضای W نیست. دیگر X پایه W نیست.

هر کدام یک پایه برای زیر فضای $W = P_1$ از فضای برداری P_2 هستند. ■

مثال ۳-۴-۶ چون مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ مولد فضای برداری R^3 نیست

(مثلاً بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را نمی‌توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای X نوشت) و

مجموعه $X'' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ چون مستقل خطی نیست (باتوجه

به مثال ۳-۳-۱ و قضیه ۳-۳-۱) هیچ کدام برای R^3 پایه نیستند. توجه کنید که مجموعه

$X' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ نیز برای R^3 پایه نیست چون نه مستقل خطی است و نه

مولد R^3 می‌باشد (تمرین). ■

مثالهای فوق نشان می‌دهند که هر فضای (یا زیر فضای) برداری می‌تواند چندین پایه داشته باشد. اینکه در مثالهای فوق پایه‌های متفاوت برای یک فضای (یا زیر فضای) برداری دارای تعداد مساوی عضو هستند. تصادفی نیست بلکه واقعیتی عمومی است که در قضیه اساسی زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۳-۴-۱ (قضیه اساسی جبر خطی) فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است. آنگاه

- (الف) هر زیر مجموعه n عضوی مستقل خطی از V یک پایه برای V است.
- (ب) هر زیر مجموعه از V که دارای بیش از n بردار باشد وابسته خطی است.
- (ج) هر زیر مجموعه از V که دارای کمتر از n بردار باشد نمی‌تواند برای V پایه

باشد. **تسبیح: تمام پایه‌ها هم‌تساوی هستند.**

اثبات:

(الف) فرض کنید $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ زیر مجموعه مستقل خطی دیگری از V

باشد.

باشد. در این صورت چون X برای V پایه است می توان نوشت

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

چون Y مستقل خطی است پس $y_1 \neq 0$ ، لذا لااقل یکی از اعداد حقیقی $a_{11}, \dots, a_{1n}$ مخالف صفر است. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $a_{11} \neq 0$ پس می توان نوشت

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n.$$

پس اگر تعریف کنیم

$$X_1 = \{y_1, x_1, \dots, x_n\}, \quad Y_1 = \{y_1, x_2, \dots, x_n\}$$

با توجه به قضیه ۲-۲-۳ می توان نوشت

$$V = sp(X) = sp(X_1)$$

$$= sp(Y_1)$$

چون Y_1 مولد V است می توان نوشت

$$y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n.$$

چون Y مستقل خطی است، همه ضرائب سمت راست رابطه فوق نمی تواند صفر باشد. از طرفی چون Y مستقل خطی است $y_2 \neq a_{21}y_1$. پس لااقل یکی از ضرائب $a_{22}, \dots, a_{2n}$ مخالف صفر است. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $a_{22} \neq 0$. پس

می توان نوشت

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}y_1 + \frac{1}{a_{22}}y_2 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n.$$

پس اگر تعریف کنیم

$$Y_2 = \{y_1, y_2, x_3, \dots, x_n\}$$

از قضیه ۲-۲-۳ نتیجه می شود که

$$V = sp(Y_2)$$

با ادامه استدلال به همین طریق، یعنی با افزودن یک y و حذف یک x در هر مرحله نهایتاً نتیجه می گیریم که

$$V = sp(Y_n)$$

اما Y_n در واقع همان Y است و بدین ترتیب اثبات قسمت (الف) کامل است.

$$c_1 - d_1 = \dots = c_n - d_n = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_n = d_n \quad \blacksquare$$

من بعد در این کتاب، همانند قضیه فوق، از حروف کوچک یونانی α و β و ... برای نشان دادن اعضای یک پایه استفاده خواهیم کرد.

قضیه زیر نشان می‌دهد که از هر مجموعه‌ای از بردارها که مولد یک فضای برداری باشد می‌توان زیر مجموعه‌ای ساخت که برای آن فضای برداری یک پایه باشد.

قضیه ۳-۴-۳ (قضیه استخراج پایه) فرض کنید مجموعه $T = \{x_1, \dots, x_k\}$ مولد فضای برداری V باشد، آنگاه زیر مجموعه‌ای از T وجود دارد که برای V یک پایه است. اثبات: به ترتیب از x_2 شروع می‌کنیم، اگر x_2 یک ترکیب خطی از x_1 باشد آن را از T حذف می‌کنیم (و با توجه به قضیه ۳-۲-۲ گستره T تغییر نمی‌کند) و اگر x_2 یک ترکیب خطی از x_1 نباشد، x_2 را در مجموعه T نگه می‌داریم. در هر صورت مجموعه T مولد V باقی می‌ماند.

در مرحله بعدی اگر x_3 یک ترکیب خطی از بردارهای باقیمانده قبل از خود (که یا $\{x_1\}$ و یا $\{x_1, x_2\}$ است) باشد آن را حذف و در غیر این صورت آن را در T ابقا می‌کنیم. در هر صورت باز هم گستره T تنبیر نکرده و T مولد V باقی می‌ماند. این کار را به همین ترتیب و برای همه اعضای بعدی T انجام می‌دهیم. نهایتاً T دارای بردارهایی خواهد بود که هیچ‌کدام یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از خود نیست و بنابر قضیه ۳-۳-۲ یک مجموعه مستقل خطی خواهد بود. چون T در طول فرایند فوق مولد V باقی می‌ماند، اثبات کامل است. $\blacksquare$

۵-۳ بعد فضای برداری

از قضیه اساسی ۳-۴-۱ چنین نتیجه می‌گیریم که هرگاه دو مجموعه متناهی X و Y از بردارهای فضای برداری V ، هر کدام یک پایه برای V باشد، آنگاه لزوماً تعداد اعضای X با تعداد اعضای Y برابر است. از این واقعیت نتیجه می‌گیریم که به هر فضا (یا زیر فضای) برداری عددی صحیح و نامنفی (به طریقی که در تعریف زیر مشخص می‌شود) منسوب است.

تعریف ۳-۵-۱ بعد یک فضای برداری غیر صفر V که آن را با $\dim V$ نشان می‌دهیم عبارت است از تعداد بردارهای موجود در یک پایه برای V .

تبصره: می‌دانیم که مجموعه خاص $\{0\}$ که تنها عضو آن عضو خنثی 0 است، یک فضای برداری است. این فضای برداری خاص که آن را فضای برداری صفر می‌نامیم، دارای پایه نیست (چون مجموعه $\{0\}$ وابسته خطی است) ولی بعد این فضای برداری را برابر صفر

تعریف می‌کنیم.
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \rightarrow \dim W = 2$$

مثال ۳-۵-۱ با توجه مثالهای ۳-۴-۱ و ۳-۴-۲ بعد فضاهای برداری $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^m$ به ترتیب برابر n ، 2 ، 3 و m است. با توجه به مثالهای ۳-۴-۳ و ۳-۴-۴ بعد فضای P_2 برابر ۳ است.

با توجه به اینکه مجموعه $T = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ که در آن $a_j = t^j$ ، $j = 0, 1, \dots, n$ است یک پایه طبیعی برای فضای برداری P_n می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که بعد فضای برداری P_n (مجموعه چند جمله‌ایهای درجه n یا کمتر) برابر $(n+1)$ است. ■

من بعد هر جا که لازم باشد بعد یک فضای برداری را به صورت اندیس نماد آن فضای برداری مثلاً به صورت V_n نشان می‌دهیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که هر مجموعه مستقل خطی از بردارها را می‌توان طوری توسعه داد که برای فضای برداری مربوطه یک پایه باشد.

قضیه ۳-۵-۱ (قضیه توسعه پایه) فرض کنید $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_k\}$ ، $k \leq n$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از فضای برداری V_n باشد، آنگاه یک پایه برای V_n وجود دارد که $\mathcal{B}$ زیر مجموعه‌ای از آن است.

اثبات: فرض کنید $T = \{a_1, \dots, a_n\}$ یک پایه برای V_n باشد، مجموعه

$$T' = \{x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_n\}$$

را بررسی می‌کنیم، و می‌بینیم که T' مولد V_n است از آن شروع کرده و هر بردار را که یک ترکیب خطی از بردارهای قبلی از خود است از T' حذف می‌کنیم و این کار را تا آنجا

ادامه می‌دهیم. نهایتاً T' به مجموعه‌ای مانند T'' تبدیل می‌شود که (اولاً) مستقل خطی است. چون هیچ بردار یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از خود نیست. (قضیه ۳-۳-۲)

(ثانیاً) مولد V_n است (قضیه ۳-۲-۲). ✓

پس T'' یک پایه برای V_n است و اثبات کامل می‌باشد.

متذکر می‌شویم که T'' دارای n عضو است (قضیه ۳-۴-۱ و تعریف ۳-۵-۱)

یعنی تعداد $n - k$ عضو از اعضای T عضو T'' باقی می‌ماند. ■

مثال ۳-۵-۲ فرض کنید می‌خواهیم پایه‌ای برای R^3 بیابیم که شامل

$$X = \{x_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ باشد. برای این کار پایه طبیعی } R^3 \text{ یعنی}$$

$$T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

را در نظر می‌گیریم. چون α_1 یک ترکیب خطی از x_1 نیست آن را به X می‌افزاییم. بردار α_2 یک ترکیب خطی از x_1 و α_1 است زیرا

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس α_2 را به X نمی‌افزاییم. چون α_3 یک ترکیب خطی از x_1 و α_1 نیست (درایه‌های سوم x_1 و α_1 هر دو صفرند) آن را به X می‌افزاییم. پس

$$T'' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

یک پایه برای R^3 است. ■ ✓

قضیه ۳-۵-۲ اگر X یک زیر مجموعه n عضوی از فضای برداری V_n و مولد آن باشد، آنگاه X یک پایه برای V_n است.

اثبات: تمرین (راهنمایی: از قضیه استخراج پایه استفاده کنید). ■
چون هر زیر فضای برداری یک فضای برداری است، بدیهی است که بعد هر زیر فضا را می توان مطابق تعریف ۳-۵-۱ تعریف کرد. یعنی

تعریف ۳-۵-۲ بعد یک زیر فضای W از فضای برداری V_n (که آن را با $\dim W$ نشان می دهیم) عبارت است از تعداد بردارهای موجود در یک پایه برای W .

نتیجه ۳-۵-۱ اگر $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک زیر مجموعه از یک فضای برداری و $W = \text{sp}(X)$ باشد آنگاه $\dim W \leq k$.

اثبات: طبق قضیه ۳-۴-۳، یک پایه دارد که زیر مجموعه X است، پس طبق تعریف بعد، حکم ثابت است. ■

$$W \neq V_n$$

قضیه ۳-۵-۳ اگر W یک زیر فضای محض فضای برداری V_n باشد، آنگاه $\dim W < n$.
اثبات: فرض کنید $S = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ یک پایه برای W باشد. آنگاه $k \leq n$ زیرا در غیراین صورت S باید وابسته خطی باشد (قسمت ب) از قضیه ۳-۴-۱) و این خلاف فرض است. حال اگر $k = n$ باشد بنابر قسمت (الف) از قضیه ۳-۴-۱ S باید یک پایه برای V_n باشد یعنی

$$V_n = \text{sp}(S) = W$$

که خلاف این فرض است که W یک زیر فضای محض است، پس $k < n$ و اثبات کامل است. ■

مثال ۳-۵-۳ از قضیه فوق مثلاً نتیجه می شود که اگر P_n مجموعه کلیه چند جمله ایهای درجه n یا کمتر باشد. داریم

$$\dim P_2 < \dim P_3$$

$$\dim P_j < \dim P_n, \quad \forall i < n$$

و

$$\dim P_n < \dim P$$

که P مجموعه کلیه چند جمله ایها است. ضمناً چون می دانیم که $\dim P_n = n + 1$ (مثال ۳-۵-۱) داریم

$$\dim P > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

که N مجموعه اعداد طبیعی است. یعنی بعد فضای برداری P از هر عدد طبیعی بزرگتر است. چنین فضای برداری را یک فضای برداری بینهایت بعدی می نامیم. ■
تعریف دقیقتر فضاهای بینهایت بعدی به صورت زیر است.

تعریف ۳-۵-۳ یک فضای برداری را بینهایت بعدی می نامیم اگر به ازای هر عدد طبیعی n یک زیر مجموعه مستقل خطی n عضوی داشته باشد.
فقدن تمام ضرایب اینها $P =$ از تمام اعداد مکرر $\{1, t, \dots, t^n\}$ برابر مقدار $\rightarrow \dim P = \infty$ مختصات و یکریختی

در این بخش خواهیم دید کلیه فضاهای برداری هم بعد از نقطه نظر جبری مشابه هم عمل می کنند، یعنی فضاهای برداری هم بعد دارای ویژگیهای متناظر یکسان هستند. به عبارت دیگر هر نتیجه ریاضی اثبات شده در یک فضای برداری متناظر و مشابه نتیجه ای در هر فضای برداری دیگر با همان بُعد است، یعنی رفتار جبری فضاهای برداری هم بعد یکسان بوده و تنها تفاوت آنها در ظاهر اعضایشان می باشد. ابتدا به یادآوری تعاریف و نتایج زیر از مبانی ریاضیات می پردازیم.

تعریف ۳-۶-۱ تابع $f: X \rightarrow Y$ را که در آن X مجموعه آغاز و دامنه f است، پوشا (یا به روی) می نامیم اگر به ازای هر $y \in Y$ عضوی مانند $x \in X$ وجود داشته باشد طوری که $y = f(x)$ باشد.

وجه تسمیه کلمه پوشا این است که تحت چنین تابعی تصویر X تمام Y را می پوشاند.

مسئله فرض کنید.

$$W = \text{sp} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u_4} \right\}$$

یک پایه برای W مرتب کنید.

مستقل $\{u_1\}$

رابطه
 $\rightarrow \{u_1, u_2\}$ مستقل $u_2 = c u_1$
 ناممکن است.

$$u_3 = u_2 - u_1 \rightarrow \text{sp}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \text{sp}\{u_1, u_2, u_4\}^*$$

?

$$u_4 = c_1 u_1 + c_2 u_2 \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 5 \\ -c_1 = -2 \rightarrow c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases} \rightarrow 2 - 2 = 0 \neq 5$$

لذا دستگاه جواب ندارد. $\{u_1, u_2, u_4\}$ مستقل است، *

$\rightarrow \{u_1, u_2, u_4\}$ پایه W .