

فصل ۱

ماتریس‌ها

مقدمه

ماتریس‌ها ابزاری نیرومند هستند که در بسیاری مباحث ریاضی محض و ریاضی کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بستگی بعضی از مباحث آمار نظری مانند آنالیز چندمتغیری، الگوهای خطی و فرآیندهای تصادفی به ماتریس‌ها انکارناپذیر است. احتمالاً ماتریس‌ها ابتدا برای حل و بحث دستگاه‌های معادلات چند مجهولی درجه اول ابداع شدند ولی همراه با نظریه فضاها برداری و تبدیلات خطی به سرعت موارد استفاده زیادی پیدا کردند.

اهداف آموزشی

آشنایی با انواع ماتریس‌ها، اعمال جمع و ضرب ماتریس‌ها
تعریف وارون یک ماتریس مربع و اثبات برخی قوانین اولیه آن
افراز ماتریس‌ها و عملیات جبری روی ماتریس‌های افراز شده
لم‌های سطری و ستونی

۱-۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱-۱-۱ یک آرایه مستطیلی از اعداد (حقیقی) را یک ماتریس می‌نامیم. بدین ترتیب اعداد داخل یک ماتریس که آنها را درایه‌های ماتریس می‌نامیم، در چند سطر و چند ستون آرایش یافته‌اند. در این کتاب یک ماتریس را معمولاً با یکی از حروف بزرگ لاتین و درایه‌های آن را با نوع کوچک همان حروف لاتین همراه با دو اندیس که

سطر و ستون درایه مورد نظر را معین می‌کند، نشان می‌دهیم. برای بیان اینکه ماتریس A دارای n سطر و k ستون است از نماد $A \sim n \times k$ و برای اینکه نشان دهیم a_{ij} یک درایه عمومی ماتریس A است از نماد $A = \{a_{ij}\}$ استفاده می‌کنیم.

تذکر: توجه کنید که ماتریس یک در یک $[c]$ با تنها درایه‌اش، c ، که یک عدد حقیقی است، برابر نیست. دو ماتریس را مساوی تعریف می‌کنیم اگر هم بعد (یعنی تعداد سطرها و ستونها) آنها با هم و تعداد ستونها و درایه‌های آنها نظیر به نظیر مساوی باشند. مثال زیر تعدادی ماتریس را نشان می‌دهد.

مثال ۱-۱-۱

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 2 \ 4],$$

قطر اصلی

قطر فرعی

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

I₃

برای مثال داریم

$$a_{11} = 2, \quad a_{13} = 4, \quad b_{21} = -3, \quad c_{14} = 4, \quad p_{31} = -5$$

تعریف ۱-۱-۲ ماتریسی را که فقط دارای یک ستون است، ماتریس ستونی و ماتریسی را که فقط دارای یک سطر است، ماتریس سطری می‌نامیم.

در مثال ۱-۱-۱، B یک ماتریس ستونی و C یک ماتریس سطری است.

چون ماتریس‌های سطری و ستونی نسبت به بقیه ماتریس‌ها در حالت کلی، کاربرد خاصی دارند، در این کتاب از نماد خاصی برای آنها استفاده می‌کنیم. ماتریس‌های

ستونی را با حروف کوچک لاتین سیاه مثلاً به صورت $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و ماتریس‌های سطری

را نیز با حروف کوچک سیاه ولی همراه با یک «پریم» مثلاً به صورت $c' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۳ ماتریسی را که تعداد سطرهایش با تعداد ستونهایش برابر باشد، یک ماتریس مربع می‌نامیم.

در مثال ۱-۱-۱ ماتریس‌های D, E, L, U, I, S و P مربع هستند.

تعریف ۱-۱-۴ ماتریس مربعی را که کلیه درایه‌های خارج از قطر اصلی آن (قطری که از سمت چپ بالا به سمت راست پایین امتداد دارد) صفر باشد، یک ماتریس قطری می‌نامیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱-۱-۵ ماتریس واحد یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری اصلی آن همگی ۱ هستند.

در مثال ۱-۱-۱ ماتریس I ماتریس واحد است. معمولاً در صورتی که لازم باشد، بعد ماتریس واحد را همراه با نماد آن نشان می‌دهیم. مثلاً ماتریس واحد مثال ۱-۱-۱ را با I_3 نشان می‌دهیم.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱-۱-۶ اگر کلیه درایه‌های پایین قطر اصلی یک ماتریس مربع صفر باشند، آن را یک ماتریس بالا مثلثی و اگر کلیه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند، آن را یک ماتریس پایین مثلثی می‌نامیم.

در مثال ۱-۱-۱، U یا ماتریس بالا مثلثی و L یک ماتریس پایین مثلثی است. تعریف فوق معادل تعریف زیر است.

تعریف ۱-۱-۷ U یک ماتریس بالا مثلثی است اگر

$$u_{ij} = 0, \forall i > j$$

و ماتریس مربع L یک ماتریس پایین مثلثی است اگر

$$l_{ij} = 0, \forall i < j$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۸-۱-۱ اگر A یک ماتریس $n \times k$ باشد و ماتریسی بسازیم که سطرهایش، ستونهای A و ستونهایش، سطرهای A باشد، ماتریس حاصل را، که یک ماتریس $k \times n$ است، ترانهادۀ ماتریس A می نامیم و با A' نشان می دهیم.

برای مثال، اگر A ماتریس مثال ۱-۱-۱ باشد داریم

$$A' = A \text{ ترانهادۀ } = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که ترانهادۀ ترانهادۀ یک ماتریس برابر خود آن ماتریس است.

ماتریسی را که با ترانهادۀش برابر باشد، متقارن می نامیم. در چنین ماتریسی درایه هایی که از نظر هندسی نسبت به قطر اصلی ماتریس قرینه یکدیگرند، با هم برابر هستند. بدیهی است که یک ماتریس متقارن لزوماً مربع است. ماتریس متقارن را به صورت زیر نیز می توان تعریف کرد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۹-۱-۱ ماتریس مربع A را متقارن می نامیم اگر $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ و پادمتقارن می نامیم اگر

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$$

در مثال ۱-۱-۱ ماتریس S متقارن و ماتریس P پادمتقارن است.

ماتریس های هم بُعد را براساس تعریف زیر می توان با هم جمع کرد.

تعریف ۱۰-۱-۱ فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times k$ باشند و آنگاه مجموع A و B ماتریسی است مانند D به طوری که

$$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, k$$

برای مثال اگر E و U ماتریس های مثال ۱-۱-۱ باشند، داریم

$$E + U = \begin{bmatrix} 4+3 & 5-1 & 6+2 \\ -1+0 & 0+5 & 2+2 \\ 3+0 & 1+0 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

بدیهی است جمع ماتریس ها، دارای ویژگی جاباه جایی و شرکت پذیری است

یعنی به ازای ماتریس‌های هم بُعد A و B و C داریم

$$A+B=B+A$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

تعریف ۱-۱-۱ یک ماتریس $n \times k$ را که همه درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌نامیم و با علامت O یا در صورت لزوم با علامت $O_{n \times k}$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص ماتریس سطری صفر را با O' و ماتریس ستونی صفر را با O نشان می‌دهیم. بدیهی است که اگر O و A هم بُعد باشند، داریم

$$A+O=A$$

اگر درایه‌های یک ماتریس نظیر به نظیر قرینه درایه‌های ماتریس A باشد، آن را قرینه A نامیده و با $-A$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که بنابر تعریف جمع ماتریس‌ها، مجموع هر ماتریس و قرینه‌اش برابر ماتریس صفر است یعنی

$$A+(-A)=O$$

تعریف ۱-۱-۲ حاصلضرب عدد حقیقی k و ماتریس A ، که آن را به صورت kA یا Ak نشان می‌دهیم، ماتریسی است هم بُعد A که هر درایه‌اش برابر حاصلضرب k و درایه متناظر از A است. یعنی اگر $B = kA$ آنگاه

$$b_{ij} = k a_{ij} \quad , \quad \forall i, j$$

با توجه به تعاریف ۱-۱-۱ و ۱-۱-۲ ملاحظه می‌شود که داریم

$$\text{حاصلضرب } -1 \text{ و } -A = (-1)A = A \text{ قرینه } A$$

با توجه به تعاریف فوق، قضیه زیر بدیهی است.

قضیه ۱-۱-۱ اگر A و B ماتریس‌های هم بُعد باشند، آنگاه

$$i) cO = O \quad , \quad ii) O A = O$$

$$iii) (A+B)' = A' + B'$$

$$iv) c(A+B) = cA + cB \quad c, d \in \mathbb{R}$$

$$v) (c+d)A = cA + dA$$

۲-۱ ضرب ماتریس‌ها

تعریف ۱-۲-۱ فرض کنید $A \sim n \times k$ و $B \sim k \times m$ در این صورت حاصلضرب AB عبارت است از یک ماتریس $n \times m$ مانند C طوری که

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^k a_{it} b_{tj}$$

توجه کنید که بنابر تعریف فوق حاصلضرب AB در صورتی تعریف شده است که تعداد ستونهای A برابر تعداد سطرهای B باشد.

واضح است که برای اینکه حاصلضرب AB و حاصلضرب BA هر دو تعریف شده باشند، لازم نیست A و B هر دو مربع و هم بعد باشند. با وجود این حتی اگر A و B هر دو مربع باشند، در حالت کلی

$$AB \neq BA$$

یعنی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

مثال ۱-۲-۱ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ آنگاه

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \times 1 + 1 \times 0 & -1 \times 2 + 1 \times 3 \\ 4 \times 1 + 0 \times 0 & 4 \times 2 + 0 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times -1 + 2 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 0 \times -1 + 3 \times 4 & 0 \times 1 + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که

$$\blacksquare AB \neq BA$$

اثبات قضیه زیر را با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها به عهده خواننده می‌گذاریم

قضیه ۱-۲-۱ در صورتی که ضرب ماتریس‌های مربوطه امکان‌پذیر باشد داریم

$$i) (cA)B = c(AB) \quad , \quad c \in R$$

$$ii) (AB)C = A(BC) \quad \text{ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها}$$

در اعداد خواص زیر برقرار است.

$$ab=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

$$a^2=0 \Rightarrow a=0$$

$$a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

$$a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$$

$$\begin{cases} ac=ad \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow c=d$$

۷ ماتریس ها

۱) در ماتریس برقرار نیست.

ویژگی توزیعی ضرب ماتریس ها نسبت به جمع ماتریس ها $iii) A(B+C) = AB+AC$

$$iv) (B+C)A = BA+CA$$

$$v) OA=O, \quad BO=O$$

$$vi) IA=A, \quad AI=A \quad (I \text{ ماتریس واحد است})$$

گرچه ویژگیهای ضرب ماتریس ها مندرج در قضیه فوق با ویژگیهای ضرب اعداد حقیقی مطابقت دارد، باید دانست که ضرب ماتریس ها از جهات دیگر متفاوت از ضرب اعداد حقیقی است. مثلاً همان طور که در مثال ۱-۲-۱ دیدیم ضرب ماتریس ها دارای ویژگی جابه جایی نیست.

همچنین به مثالهای زیر توجه کنید.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ۲-۲-۱}$$

در ماتریس حذف ماتریس
از رابطه ضربی غلط است.

$$AB=O \text{ ولی } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq O \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq O \quad (i)$$

$$A^2=A \cdot A=O \text{ ولی } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq O \quad (ii)$$

$$A^2=I \text{ ولی } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \pm I \quad (iii)$$

$$\blacksquare A^2=B^2=I \text{ ولی } A \neq \pm B \text{ و } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (iv)$$

$$AC=AD$$

$$C \neq D$$

باید توجه داشت که اگر A و B هیچ کدام مربع نباشند، AB با هیچ کدام از دو

ماتریس A و B هم بُعد نیست. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۳-۲-۱

$$i) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 19 \end{bmatrix} \sim 2 \times 1$$

$$ii) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \sim 1 \times 1$$

$$\text{iii) } A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim 3 \times 3 \quad \blacksquare$$

قضیه ۱-۲-۲ اگر دو ماتریس A و B به صورت AB قابل ضرب باشند، داریم

$$(AB)' = B' A'$$

اثبات: فرض کنید $A \sim n \times k$ و $B \sim k \times m$ ، $C = AB$ و $D = B' A'$

طبق تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^k a_{it} b_{tj} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

اگر درایه‌های ماتریس C' را با c'_{ij} نشان دهیم، طبق تعریف ترانپوزه داریم

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{t=1}^k a_{jt} b_{ti}$$

از طرف دیگر اگر درایه‌های A' و B' را به ترتیب با a'_{ij} و b'_{ij} نشان دهیم داریم

$$\begin{aligned} d'_{ij} &= \sum_{t=1}^k b'_{it} a'_{tj} \\ &= \sum_{t=1}^k b_{ti} a_{jt} = \sum_{t=1}^k a_{jt} b_{ti} = c'_{ij} \end{aligned}$$

و اثبات کامل است. $\blacksquare$

۱-۳-۱ وارون یک ماتریس

تعریف ۱-۳-۱ اگر $AB = I$ باشد، B را وارون راست A می‌نامیم و اگر $BA = I$ باشد، B را وارون چپ A می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۱ اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ آن‌گاه به‌ازای هر دو

عدد حقیقی a و b ماتریس B وارون راست ماتریس A است چون

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \blacksquare$$

همان‌طور که مثال فوق نشان می‌دهد وارون راست (یا چپ) یک ماتریس ممکن است یکتا نباشد و همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد یک ماتریس ممکن است وارون راست (یا چپ) نداشته باشد.

مثال ۱-۳-۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ وارون راست ندارد، زیرا اگر $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون راست A باشد باید

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+c=0 \\ b+d=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

دستگاه فوق با توجه به ناسازگار بودن معادلات اول و دوم (یا معادلات سوم و چهارم) جواب ندارد و در نتیجه وارون راست برای A موجود نیست. به‌طریق مشابه می‌توان نشان داد که A وارون چپ نیز ندارد. $\blacksquare$

تعریف ۱-۳-۲ ماتریس B را وارون ماتریس A می‌نامیم اگر $AB = BA = I$ (یعنی اگر B هم وارون راست و هم وارون چپ A باشد). در این صورت A را وارون‌پذیر می‌نامیم.*

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که فقط ماتریس‌های مربع می‌توانند وارون‌پذیر

*. در آینده کلمه «نامنفرد» را به معنی وارون‌پذیر و کلمه «منفرد» را به معنی وارون‌ناپذیر به کار خواهیم برد.

باشد. البته همان طور که مثال ۱-۳-۲ نشان می دهد همه ماتریس های مربع وارون پذیر نیستند.

قضیه ۱-۳-۱ وارون یک ماتریس در صورت وجود یکتاست.
اثبات: فرض کنید هم B و هم C وارون ماتریس A باشد، آنگاه

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B \quad \blacksquare$$

وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می دهیم.

مثال ۱-۳-۳ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ در این صورت

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وارون A است. زیرا با ضرب ماتریس های فوق می توان دید که $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.
به طور کلی به راحتی می توان نشان داد که اگر D یک ماتریس قطری به صورت

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & O \\ O & d_n \end{bmatrix}$$

باشد، داریم

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & O \\ O & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

یعنی وارون یک ماتریس قطری یک ماتریس قطری است که درایه های روی قطر اصلی

آن عکس درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس اولیه است. (توجه کنید که هیچ‌کدام از d_i ها صفر نیستند). ■

مثال ۱-۳-۴ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ وارون A را می‌توان به طریق زیر پیدا کرد. فرض کنید $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+c & 3b+d \end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن درایه‌های ماتریس سمت راست رابطه فوق، نظیر به نظیر با

$$\text{درایه‌های ماتریس } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ داریم}$$

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3a+c=0 \\ 3b+d=1 \end{cases}$$

از دستگاه چهار معادله چهار مجهولی فوق نتیجه می‌شود

$$a=d=\frac{-1}{5}, \quad b=\frac{2}{5}, \quad c=\frac{3}{5}$$

پس

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

در حالت کلی می‌توان نشان داد (تمرین) که اگر $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

آنگاه وارون ماتریس وجود دارد و برابر است با

$$A^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$